(٣٠) ا + لا

ب + لا

ب ا + ب لا

ا لا + لا^2

ب ا + (ب + ا) لا + لا^2

ج + لا

ج ب ا + ج (ب + ا) لا + ج لا^2

+ ب ا   لا + (ب + ا) لا^2 + لا^3

ج ب ا + (ج ب + ج ا + ب ا) لا + (ا + ب + ج) لا^2 + لا^3

(٣١) لا − ا

لا − ب

لا^2 − ا لا

− ب لا + ا ب

لا^2 − (ا + ب) لا + ا ب

لا − ج

لا^3 − (ا + ب) لا^2 + ا ب لا

− ج لا^2 + (ا + ب) ج لا − ا ج ب

لا^3 − (ا + ب + ج) لا^2 + (ا ب + ا ج + ب ج) لا − ا ج ب

لا − د

لا^4 − (ا + ب + ج) لا^3 + (ا ب + ا ج + ب ج) لا^2 − ا ج ب لا

− د لا^3 + (ا + ب + ج) د لا^2 − (ا ب + ا ج + ب ج) د لا + ا د ج ب

لا^4 − (ا + ب + ج + د) لا^3 + (ا ب + ا ج + ب ج + ا د + ب د + ج د) لا^2 − (ا ب د + ا ج د + ب ج د + ا ج ب) لا + ا د ج ب

(٣٢) پہلے ہم اول اور دوم اجزاء ضربی کو ضرب دیتے ہیں اور پھر سوم و چہارم اجزاء ضربی کو اور پھر جو دونوں حاصل ضرب حاصل ہوتے ہیں اونکو ضرب دیتے ہیں اور دفعہ ۵۶ کی ترکیب عمل میں لاتے ہیں

(ا + ب − ج) (ا + ج − ب) = (ا − (ج − ب)) (ا + (ج − ب))

= ا^{2} − (ح − ب)^{2} = ا^{2} − ح^{2} − ب^{2} + ۲ ح ب

(ب + ح − ا) (ا + ب + ح) = (ب + ح)^{2} − ا^{2}

= ب^{2} + ح^{2} + ۲ ب ح − ا^{2}

(ب^{2} + ح^{2} + ۲ ب ح − ا^{2}) × (ا^{2} − ح^{2} − ب^{2} + ۲ ح ب)

= [(۲ ب ح + ب^{2} + ح^{2} − ا^{2})] [(۲ ب ح − (ب^{2} + ح^{2} − ا^{2})]

= ۴ ب^{2} ح^{2} − [ب^{2} + ح^{2} − ا^{2}]^{2}

= ۴ ب^{2} ح^{2} − [ب^{4} + ۲ ب^{2} ح^{2} − ۲ ا^{2} ب^{2} + ح^{4} − ۲ ح^{2} ا^{2} + ا^{4}]

= ۲ ب^{2} ح^{2} + ۲ ح^{2} ا^{2} + ۲ ا^{2} ب^{2} − ب^{4} − ح^{4} − ا^{4}

(۳۳) (ا + ب) (ب + ح) = ا ب + ا ح + ب^{2} + ب ح

(ح + د) (د + ا) = ح د + ا ح + د^{2} + د ا

(ا + ح) (ب − د) = ا ب − ا د + ب ح − ح د

پس ا ب + ح ا + ب^{2} + ب ح − (ح د + ا ح + د^{2} + د ا) − (ا ب − ا د + ب ح − ح

= ا ب + ح ا + ب^{2} + ب ح − ح د − ا ح − د^{2} − د ا − ا ب + ا د − ب ح + ح د

= ب^{2} − د^{2}

(۳۴) (ا + ب + ح + د)^{2} = ا^{2} + ب^{2} + ح^{2} + د^{2} + ۲ ا ب + ۲ ا ح + ۲ ا د + ۲ ب ح + ۲ ب د + ۲ ح

(ا − ب − ح + د)^{2} = ا^{2} + ب^{2} + ح^{2} + د^{2} − ۲ ا ب − ۲ ا ح + ۲ ا د + ۲ ب ح − ۲ ب د − ۲ ح

(ا − ب + ح − د)^{2} = ا^{2} + ب^{2} + ح^{2} + د^{2} − ۲ ا ب + ۲ ا ح − ۲ ا د − ۲ ب ح + ۲ ب د − ۲ ح

(ا + ب − ح − د)^{2} = ا^{2} + ب^{2} + ح^{2} + د^{2} + ۲ ا ب − ۲ ا ح − ۲ ا د − ۲ ب ح − ۲ ب د + ۲ ح

حاصل جمع = ۴ (ا^{2} + ب^{2} + ح^{2} + د^{2})

(۳۵) بموجب فقرہ ۵۵ (لا + ر + ی)^{3} = لا^{3} + ر^{3} + ی^{3} + ۳ لا^{2} (ر + ی) + ۳ ر^{2} (لا + ی) + ۳ ی^{2} (لا +

∴ (لا + ر + ی)^{3} − لا^{3} − ر^{3} − ی^{3} = ۳ لا^{2} (ر + ی) + ۳ ر^{2} (لا + ی) + ۳ ی^{2} (لا + ر) + ۶ لا ر ی

۳ (ر + ی) (ی) + (لا) (لا + ر) = ۳ (ر ی + ر لا + ی^{2} + ی لا) (لا + ر) = ۳ (۲ لا ر ی + لا^{2} ر + لا ی^{2} +

= ۳ ی^{2} (ی + لا) + ۳ لا^{2} (ی + ی) + ۳ ی^{2} (لا + ی) + ۶ لا ی ی اسی دعوے ثابت ہے

(۳۶) (ا + ب + ح)^{2} = ا^{2} + ب^{2} + ح^{2} + ۲ ا ب + ۲ ا ح + ۲ ب ح

ا (ب + ح − ا) + ب (ا + ح − ب) + ح (ا + ب − ح) = ا ب + ا ح − ا^{2} + ب ا + ب ح − ب^{2} + ح ا + ح ب − ح^{2}

= ۲ ا ب + ۲ ا ح + ۲ ح ب − ا^{2} − ب^{2} − ح^{2}

حاصل تفریق = ۲ (ا^{2} + ب^{2} + ح^{2})۔

(۳۷) (لا − ی)^{3} + (لا + ی)^{3} = لا^{3} − ۳ لا^{2} ی + ۳ لا ی^{2} − ی^{3} + لا^{3} + ۳ لا^{2} ی + ۳ لا ی^{2} + ی^{3} = ۲ لا^{3} + ۶ لا ی^{2}

۳ (لا − ی)^{2} (لا + ی) = ۳ (لا^{2} − ۲ لا ی + ی^{2}) (لا + ی) = ۳ [لا^{3} − لا^{2} ی − لا ی^{2} + ی^{3}]

۳ (لا + ی)^{2} (لا − ی) = ۳ (لا^{2} + ۲ لا ی + ی^{2}) (لا − ی) = ۳ [لا^{3} + لا^{2} ی − لا ی^{2} − ی^{3}]

حاصل جمع = ۸ لا^{3}

(۳۸) (ا^{2} + ب^{2} + ح^{2})^{2} = ا^{4} + ب^{4} + ح^{4} + ۲ ا^{2} ب^{2} + ۲ ا^{2} ح^{2} + ۲ ب^{2} ح^{2} اور بموجب مثال ۳۳

(ا + ب + ح) (ا + ب − ح) (ا + ح − ب) (ب + ح − ا) = ۲ ب^{2} ح^{2} + ۲ ح^{2} ا^{2} + ۲ ا^{2} ب^{2} − ا^{4} − ب^{4} − ح^{4}

اب ان دونو کا فرق = ۲ (ا^{4} + ب^{4} + ح^{4})

(۳۹) اوپر کے مثال میں تفریق کرنے کی جگہہ جمع کرو تو ۲ (ب^{2} ح^{2} + ح^{2} ا^{2} + ا^{2} ب^{2})

(۴۰) (لا^{2} + لا ی + ی^{2})^{4} = ۲ (لا^{2} + لا ی + ی^{2})^{2} (لا^{2} + لا ی + ی^{2})^{2}

= ۲ (لا^{4} + ۳ لا^{2} ی^{2} + ی^{4} + ۲ لا^{3} ی + ۲ لا ی^{3})^{2}

= ۲ (لا^{8} + ۱۹ لا^{4} ی^{4} + ی^{8} + ۴ لا^{2} ی^{6} + ۴ لا ی^{7} + ۶ لا^{6} ی^{2} + ۴ لا^{7} ی + ۴ لا^{5} ی^{3} + ۴ لا^{3} ی^{5} + ۱۴ لا^{6} ی^{2})

اور ۸ لا^{2} ی^{2} (لا + ی)^{2} (لا^{2} + لا ی + ی^{2}) = ۸ لا^{2} ی^{2} (لا^{2} + ۲ لا ی + ی^{2}) (لا^{2} + لا ی + ی^{2})

= ۸ لا^{2} ی^{2} (لا^{4} + ۳ لا^{3} ی + ۴ لا^{2} ی^{2} + ۳ لا ی^{3} + ی^{4})

= ۲ (۴ لا^{6} ی^{2} + ۱۲ لا^{5} ی^{3} + ۱۶ لا^{4} ی^{4} + ۱۲ لا^{3} ی^{5} + ۴ لا^{2} ی^{6})

حاصل جمع = ۲ (لا^{8} + ۴ لا^{7} ی + ۱۴ لا^{6} ی^{2} + ۲۸ لا^{5} ی^{3} + ۳۵ لا^{4} ی^{4} + ۲۸ لا^{3} ی^{5} + ۱۴ لا^{2} ی^{6} + ۴ لا ی^{7} + ی^{8})

اور لا^{8} + ی^{8} + (لا + ی)^{8} = لا^{8} + ی^{8} + (لا + ی)^{2} (لا + ی)^{2} (لا + ی)^{2} (لا + ی)^{2}

۲ پر تقسیم کرو ۳لا − ۷) ۳لا^2 − ۱۰لا + ۷ (لا − ۱

۳لا^2 − ۷لا

− ۳لا + ۷

− ۳لا + ۷

(۸) لا^3 − لا^2 − ۲لا + ۲) لا^4 − ۳لا^3 + ۲لا^2 + لا − ۱ (لا − ۲

لا^4 − لا^3 − ۲لا^2 + ۲لا

− ۲لا^3 + ۴لا^2 − لا − ۱

− ۲لا^3 + ۲لا^2 + ۴لا − ۴

۲لا^2 − ۵لا + ۳

پہلے مقسوم کو ۲ میں ضرب دیکر ۲لا^2 − ۵لا + ۳) ۲لا^3 − ۲لا^2 − ۴لا + ۴ (لا

۲لا^3 − ۵لا^2 + ۳لا

۳لا^2 − ۷لا + ۴

۲ میں ضرب دیکر تقسیم کو جاری کرو ۶لا^2 − ۱۴لا + ۸ (۳

۶لا^2 − ۱۵لا + ۹

لا − ۱) ۲لا^2 − ۵لا + ۳ (۲لا − ۳

۲لا^2 − ۲لا

− ۳لا + ۳

− ۳لا + ۳

(۹) لا^3 − ۸لا^2 + ۱۹لا − ۱۴) لا^4 − ۷لا^3 + ۸لا^2 + ۲۸لا − ۴۸ (لا + ۱

لا^4 − ۸لا^3 + ۱۹لا^2 − ۱۴لا

لا^3 − ۱۱لا^2 + ۴۲لا − ۴۸

لا^3 − ۸لا^2 + ۱۹لا − ۱۴

− ۳لا^2 + ۲۳لا − ۳۴

پہلے مقسوم کو ۳ میں ضرب دو اور مقسوم علیہ کی علامت بدل دو

۳لا^2 − ۲۳لا + ۳۴) ۳لا^3 − ۲۴لا^2 + ۵۷لا − ۴۲ (لا + ۱

۳لا^3 − ۲۳لا^2 + ۳۴لا

− لا^2 + ۲۳لا − ۴۲

۳لا^2 ۶۹لا + ۱۲۶

۳لا^2 − ۲۳لا + ۳۴

− ۴۶لا + ۹۲

لا + ۲) لا۲ + ۷ لا + ۱۰ (لا + ۵

لا۲ + ۲ لا

۵ لا + ۱۰

۵ لا + ۱۰

(۱۲) اول جملہ کو ۲ مین ضرب دو

۴ لا۳ − ۱۸ لا۲ + ۱۹ لا − ۳) ۴ لا۴ − ۲۴ لا۳ + ۳۸ لا۲ − ۱۲ لا + ۱۸ (لا

۴ لا۴ − ۱۸ لا۳ + ۱۹ لا۲ − ۳ لا

− ۶ لا۳ + ۱۹ لا۲ − ۹ لا + ۱۸

۲ مین ضرب دو اور تقسیم جاری رکھو

− ۱۲ لا۳ + ۳۸ لا۲ − ۱۸ لا + ۳۶ (− ۳

− ۱۲ لا۳ + ۵۴ لا۲ − ۵۷ لا + ۹

− ۱۶ لا۲ + ۳۹ لا + ۲۷

نئے مقسوم کو ۴ مین ضرب دو اور مقسوم علیہ کے علامت بدلو

۱۶ لا۲ − ۳۹ لا − ۲۷) ۱۶ لا۳ − ۷۲ لا۲ + ۷۶ لا − ۱۲ (لا

۱۶ لا۳ − ۳۹ لا۲ − ۲۷ لا

۱۶ مین ضرب دو اور تقسیم بدستور جاری رکھو

− ۳۳ لا۲ + ۱۰۳ لا + − ۳۳

− ۵۲۸ لا۲ + ۱۶۴۸ لا − ۱۹۲ (− ۳۳

− ۵۲۸ لا۲ + ۱۲۸۷ لا + ۸۹۱

۳۶۱ لا − ۱۰۸۳

۳۶۱ پر تقسیم کرو لا − ۳) ۱۶ لا۲ − ۳۹ لا − ۲۷ (۱۶ لا + ۹

۱۶ لا۲ − ۴۸ لا

۹ لا − ۲۷

۹ لا − ۲۷

(۱۳) اول جملہ کو لا پر تقسیم کرو اور دوسری جملہ کو ۳ مین ضرب دو

۶ لا۳ + لا۲ − ۱) ۱۲ لا۳ − ۱۸ لا۲ − ۱۲ لا + ۹ (۲

۱۲ لا۳ + ۲ لا۲ − ۲

− ۲۰ لا۲ − ۱۲ لا + ۱۱

نئے مقسوم کو ۱۰ مین ضرب اور مقسوم علیہ کے علامت بدلو

ب (ب۲ + ح ا + ح۲) پر تقسیم کرو ۲ لا۲ (۳ ب − ۲ ح) لا − ۳ ب ح (لا + ح

۲ لا۲ − ۳ ب لا

۲ ح لا − ۳ ب ح

۲ ح لا − ۳ ب ح

پس مقسوم علیہ اعظم ۲ لا − ۳ ب ہے اور پہلا جملہ = (۲ لا − ۳ ب) (لا۲ + ۲ ا لا − ب۲) اور

دوسرا جملہ = (۲ لا − ۳ ب) (لا + ح)

(۱۶) بموجب فقرہ ۷ کے جملوں کی تجزی اجزاء ضربی جبر پیش کرو تو انکی یہہ صورت ہوگی

۲۴ (ا − ب)۲ (ا۲ + ب۲ + ا ب) اور ۹ (ا۲ + ب۲) (ا − ب) (ا − ب)۲ اور ۱۲ (ا + ب)۲ (ا − ب)۲

اسلئے ذو اضعاف اقل ۷۲ (ا − ب)۲ (ا۲ + ب۲ + ا ب) (ا۲ + ب۲) (ا + ب)۲ ا ب

اسکی یہہ صورت بھی ہوسکتی ہے ۷۲ (ا۳ − ب۳) (ا۲ − ب۲)۲ (ا۲ + ب۲) یا ۷۲ (ا۲ − ب۲)۲ (ا۲ − ب۲) (ا۳ − ب۳)

باب ہشتم کسور

(۱) لا۳ + ۶ لا − ۷ (لا۲ + ۲ لا − ۳ (۱

لا۲ + ۲ لا − ۳

۴ لا − ۴

۴ پر تقسیم کرو لا − ۱ (لا۲ + ۲ لا − ۳ (لا پس لا − ۱ مقسوم علیہ اعظم ہوا

لا۲ − لا

۳ لا − ۳

۳ لا − ۳

(۲) لا۳ − ۳ لا − ۲ (لا۳ − ۴ لا − ۵ (۱ علامت بدلی لا + ۱ (لا۲ − ۳ لا − ۴ (لا − ۴

لا۳ − ۳ لا − ۲

− لا − ۱

لا۲ + لا

− ۴ لا − ۴

− ۴ لا − ۴

پس لا + ۱ مقسوم علیہ اعظم ہوا

(۳) لا۳ − ۳ لا + ۲ (لا۳ − ۶ لا۲ + ۱۱ لا − ۶ (لا − ۳

لا۳ − ۳ لا۲ + ۲ لا

− ۳ لا۲ + ۹ لا − ۶

− ۳ لا۲ + ۹ لا − ۶

پس لا۲ − ۳ لا + ۲ مقسوم علیہ اعظم ہوا

نواں باب

(۱) ۸ میں ضرب دو ۸ لا + ۳ = ۶ لا + ۵ ∴ لا = ۲

(۲) ۲۰ میں ضرب دو ۱۰ لا - ۴۰ = ۵ لا + ۴ لا - ۲۰ ∴ لا = ۲۰

(۳) ۴۰ میں ضرب دو ۱۲ لا + ۲۰ + ۲۴ لا - ۳۲ + ۵ = ۳۰ لا + ۳۵ ∴ لا = ۳

(۴) ۶۰ میں ضرب دو ۱۵ (۵ لا - ۱۱) - ۶ (لا - ۱) = ۵ (۱۱ لا - ۱) ∴ لا =

(۵) ۱۲ میں ضرب دو ۶ لا + ۴ لا - ۳ لا = ۶ ∴ لا = ۶/۷

(۶) ۱۲ میں ضرب دو ۶ (لا + ۱) + ۴ (لا + ۲) = ۱۹۲ - ۳ (لا + ۳)

(۷) ۶ میں ضرب دو ۶ لا + ۲ (۱۱ - لا) = ۳ (۲۶ - لا)

(۸) ۲ میں ضرب دو ۳۸ لا + ۷ لا - ۲۰ = ۸ لا + ۳۵

(۹) ۲۴ میں ضرب دو ۶ (لا - ۳) + ۸ (لا - ۴) = ۱۲ (لا - ۵) + ۳ (لا + ۱)

(۱۰) ۶ میں ضرب دو ۳ (۵ لا - ۷) - ۲ (۲ لا + ۷) = ۶ (۳ لا - ۱۴)

(۱۱) ۶۰ میں ضرب دو ۱۵ (لا - ۳) - ۱۰۰ (۲ لا - ۵) = ۴۱ + ۱۲ (۳ لا - ۸) - ۴ (۵ لا + ۶)

(۱۲) ۶ میں ضرب دو ۲ (۵ لا + ۳) - ۳ (۳ لا - ۷) = ۶ (۵ لا - ۱۰)

(۱۳) ۱۸ میں ضرب دو ۳ (۸ - لا) + ۱۸ لا - ۳۰ = ۹ (لا + ۶) - ۶ لا

(۱۴) ۱۲ میں ضرب دو ۶ (لا + ۳) - ۴ (لا - ۲) = ۳ لا - ۵ + ۴

(۱۵) ۳۰ میں ضرب دو ۶ (۳ لا - ۱) - ۱۵ (۱۳ - لا) = ۶۰ لا - ۵۵ (لا + ۱۰)

(۱۶) ۴۲ میں ضرب د ۶ (۵ لا - ۳) - ۱۴ (۹ - لا) = ۱۰۵ لا + ۱۳۳ (لا - ۴)

(۱۷) ۵ × ۷ × ۱۱ میں ضرب دو ۵۵ (۵ لا - ۱) + ۳۵ (۹ لا - ۵) = ۷۷ (۹ لا - ۷)

(۱۸) ۳ × ۵ × ۷ میں ضرب دو ۱۵ (۳ لا + ۵) - ۳۵ (۲ لا + ۷) + ۱۰۵ - ۶۳ لا = ۰

(۱۹) ۱۲ میں ضرب دو ۳ لا - ۲ (۵ لا + ۸) = ۴ (۲ لا - ۹)

(۲۰) ۶ میں ضرب دو ۱۲ لا - ۳ (۹ - ۲ لا) = ۲ (۲ لا - ۱۱)

اسواسطے ۲(۳لا۲ − ۱۰لا − ۲) + (۶لا۲ − ۱۷لا + ۱۵) = ۶(۲لا۲ − ۱۱لا + ۱۵)

(۴۹) لا + ۱ میں ضرب دو ۲۵ − ۱/۳ لا + لا (لا + ۱)(۱۶لا + ۴ ۱/۵) / (۳لا + ۲) = ۲۳ + ۵ (لا + ۱)

اسواسطے (لا + ۱)(۱۶لا + ۴ ۱/۵) / (۳لا + ۲) = ۳لا + ۱۶/۳ لا

(لا + ۱)(۱۶لا + ۲۱/۵) = (۳لا + ۲)(۳ + ۱۶/۳ لا)

۱۶لا۲ + ۲۱لا/۵ + ۱۶لا + ۲۱/۵ = ۱۶لا۲ + ۳۲لا/۳ + ۹لا + ۶ ۔

(۵۰) ۶۰ میں ضرب دو تو ۳۰(لا − ۲/۳) − ۲۰(لا − ۱/۴) + ۱۵(لا − ۱/۵) = ۰

یعنے ۳۰لا − ۱۰۰ا − ۲۰لا + ۵ا + ۱۵لا − ۳ا = ۰ یعنی ۲۵لا = ۸ا

(۵۱) لا۲ + (ا + ب) لا + اب = لا۲ + (ح + د) لا + ح د

(۵۲) ا(ب۲ − ا۲) میں ضرب دو تو (ب۲ − ا۲) لا + ا(ب + ا) لا = ا۲(ب − ا)

اسیواسطے ب (ب + ا) لا = ا۲(ب − ا) ∴ لا = ا۲(ب − ا) / ب(ب + ا)

(۵۳) اب میں ضرب دو ا۲ب لا + اب۲ = ب لا + ا ∴ ب (ا۲ − ۱) لا = ا(ا − ب۲)

(۵۴) ابح میں ضرب دو اح (لا − ا) + اب (لا − ب) + بح (لا − ح) = لا − (ا + ب + ح)

(اح + اب + بح − ۱) لا = ا۲ح + اب۲ + ح۲ب − (ا + ب + ح)

(۵۵) لا۲ + (ا + ب) لا + اب − اب − اح = ا۲ح/ب + لا۲

(ا + ب) لا = ا۲ح/ب + اح = اح(ا + ب)/ب ∴ لا = اح/ب

(۵۶) کسر دور کرو (ا + ب)(لا − ا)(لا − ب) = ا(لا − ب)(لا − ح) + ب(لا − ا)(لا − ح)

(ا + ب) لا۲ − (ا + ب)۲ لا + اب (ا + ب) = (ا + ب) لا۲ − [ح (ا + ب) − ۲اب] لا + ۲ابح

اسواسطے [ا۲ + ب۲ − ح (ا + ب)] لا = اب (ا + ب) − ۲ابح

(۵۷) اع لا۲ + (اق + بع) لا۲ + (بق + ح ع) لا + ح ق = اع لا۲ + (اق + بع) لا۲ + (ق ب + را) لا + رب

اسواسطے (ح ع − را) لا = رب − ح ق

(۵۸) ا(ا + ب)۲ میں ضرب دو تو ۳ا۲بح (ا + ب) + ا۳ب۲/(ا + ب) + (۲ا + ب) ب۲ لا

= ۳احلا (ا + ب)۲ + ب (ا + ب۲) لا

اسواسطے ۳ا سےح (ا+ب) + ا^۳ب^۲/(ا+ب) = ۳ا ح (ا+ب)^۲ لا + ا^۲ب لا

ا^۲ب [۳ح (ا+ب)^۲ + اب] / (ا+ب) = ا[۳ح (ا+ب)^۲ + اب] لا

ا[۳ح (ا+ب)^۲ + اب] پر تقسیم کیا تو لا = اب/(ا+ب)

(۵۹) کسر دور کی م(لا+ا)^۲ + ن(لا+ب)^۲ = (م+ن) (لا+ا) (لا+ب)

م(لا^۲ + ۲ا لا + ا^۲) + ن(لا^۲ + ۲ب لا + ب^۲) = (م+ن) [لا^۲ + (ا+ب) لا + اب]

(م+ن) لا^۲ + ۲(ا م + ب ن) لا + م ا^۲ + ن ب^۲ = (م+ن) لا^۲ + (ا م + ن ب + م ب + ن ا) لا
+ (م+ن) اب

[م ب + ن ا − ا م − ب ن] لا = م ا^۲ + ن ب^۲ − م اب − ن اب

(م−ن) (ب−ا) لا = (ن ب − م ا) (ب−ا) ∴ لا = (ن ب − م ا)/(م−ن)

(۶۰) کسر دور کرو تو (لا−ا)^۳ (لا+ا+۲ب) = (لا+ب)^۳ (لا−۲ا−ب)

لا^۴ − ۲(ا−ب) لا^۳ − ۶اب لا^۲ + ۲(ا^۳ + ۳ا^۲ب) لا − ا^۳ (ا+۲ب)

= لا^۴ − ۲(ا−ب) لا^۳ − ۶ب لا^۲ − ۲(ب^۳ + ۳ب^۲ا) لا − ب^۳ (۲ا+ب)

اسلئے ۲(ا+ب)^۳ لا = (ا^۲ − ب^۲) (ا+ب)^۲ ∴ لا = ا − ب

(۶۱) ۳لا^۳ − ۳(ا+ب+ح) لا^۲ + ۳(ا^۲ + ب^۲ + ح^۲) لا − ا^۳ − ب^۳ − ح^۳

= ۳[لا^۳ − (ا+ب+ح) لا^۲ + (اب + اح + بح) لا − ابح]

اسواسطے ۳[ا^۲ + ب^۲ + ح^۲ − اب − اح − بح] لا = ا^۳ + ب^۳ + ح^۳ − ۳ابح

= (ا^۲ + ب^۲ + ح^۲ − اب − اح − بح) (ا+ب+ح) ∴ لا = ا+ب+ح

(۶۲) لا۱۵/۱۰۰ + ۱۵۷۵/۱۰۰۰ − لا۸۷۵/۱۰۰۰ = لا۶۲۵/۱۰۰۰۰

لا۱۵۰۰ + ۱۵۷۵۰ − لا۸۷۵۰ = لا۶۲۵

(۶۳) ۱۲/۱۰ لا − ۱/۵ (۱۸/۱۰۰ لا − ۵/۱۰۰) = ۴/۱۰ لا + ۸۹/۱۰

۱۲/۱۰ لا − ۳۶/۱۰۰۰ لا + ۱/۱۰۰ = ۴/۱۰ لا + ۸۹/۱۰

(۴۴) ۲۵/۱۰ لا − ۱/۵ (۶۲/۱۰۰ لا − ۵/۱۰۰) = ۱۴/۱۰ لا + ۸۹/۱۰ اسواسطے ۱۲۵/۱۰ لا − ۱۴۴/۱۰۰ + ۱/۱۰ = ۱۱۱۶/۱۰ + ۸۹/۱۰

باب دہم

(۱) فرض کرو کہ غریب آدمی کا روپیہ لا ہے تو امیر آدمی کا روپیہ ۲ لا ہوگا پس لا + ۲ لا = ۳۸۷۰

(۲) فرض کرو کہ ایک شخص نے لا دفعہ اٹھنی پائی تو لا/۲ روپیہ اوسنے پایا اور دوسرے نے ۵/۱۲ لا روپیہ پایا تو لا/۲ + ۵/۱۲ لا = ۱۴۲۰ اسواسطے لا = ۶۴۰ پس ۳۲۰ روپیہ ایک شخص نے اور دوسرے نی ۱۰۰ روپیہ پائی

(۳) فرض کرو کہ تھیلی میں لا آنے ہیں تو لا/۵ + لا/۴ = ۴۵

(۴) فرض کرو کہ بل کے روپیہ کی تعداد لا روپیہ ہے تو لا − لا/۷ − لا/۵ = ۹۲

(۵) فرض کرو کہ ایک حصہ لا ہے تو دوسرا حصہ ۴۶ − لا ہوگا پس لا/۷ + (۴۶ − لا)/۳ = ۱۰

(۶) فرض کرو کہ بچون کے تعداد لا ہے تو لا + ۴ لا + ۲ لا = ۲۶۶

(۷) فرض کرو کہ آمدنی میں تعداد روپیہ کی لا ہے تو لا/۴ + لا/۸ + لا/۱۰ + ۳۱۸ = لا

(۸) فرض کرو کہ ب گانوسے لا روپیہ اکھٹا کیا گیا تو ۳ لا/۵ روپیہ آ سے اور ۳ لا/۸ روپیہ ج سے اکٹھا کیا گیا

لا + ۳ لا/۵ + ۳ لا/۸ لا = ۴۲۷ ۱/۲

(۹) فرض کرو کہ زید کو لا روپیہ ملا تو بکر کو لا + ۱۰۰ اور عمر کو لا + ۱۰۰ + ۲۷۰ لا

پس لا + لا + ۱۰۰ + لا + ۱۰۰ + ۲۷۰ = ۱۵۲۰

(۱۰) فرض کرو کہ جو روپیہ تقسیم ہوا اوسکی تعداد لا ہے ― تو زید کو لا/۲ ― ۳۰ روپیہ اور بکر کو لا/۳ ― ۱۰ اور عمر کو لا/۴ + ۸ روپیہ ملا پس

لا/۲ ― ۳۰ + لا/۳ ― ۱۰ + لا/۴ + ۸ = لا

(۱۱) فرض کرو کہ بڑی عدد کو لا تعبیر کرتا ہے تو ۵۷۶۰ − لا دوسرے عدد کو تعبیر کریگا

لا − (۵۷۶۰ − لا) = لا/۲۴

(۱۲) فرض کرو کہ ایک پیپہ میں شراب کے تولون کی تعداد لا ہے تو لا − ۳۴ ایک پیپہ میں اور لا − ۸۰ دوسرے پیپہ میں شراب ہوگی تو لا − ۳۴ = ۲ (لا − ۸۰)

(۲۵) فرض کرو کہ پہلی تین روپیوں کی تعداد لا تھی تو زید نے $[۲ + \frac{لا-۲}{۶}]$ روپیہ لگائی اور بکر نے $۳ + \frac{۱}{۶}[لا - ۲ - \frac{لا-۲}{۶} - ۳]$ روپیہ لگائے

$$\frac{لا-۲}{۳۶} - \frac{لا-۵}{۶} + ۳ = \frac{لا-۲}{۶} + ۲$$

(۲۶) فرضکرو کہ خرگوش کی ذقندوں کی تعداد لا ہے تو کتا $\frac{۲لا}{۳}$ ذقندیں لگائیگا اور یہ برابر ہے $\frac{۴لا}{۳}$ خرگوش کے ذقندوں کے ہیں پس $لا + ۸۰ = \frac{۴لا}{۳}$

(۲۷) فرض کرو کہ کھیت کے عرض میں گزوں کی تعداد لا ہے تو ۲لا طول میں گزوں کی تعداد ہوگی اور $۲لا^۲$ رقبہ ہوگا اور دوسرے کھیت کا طول ۲لا+۵۰ اور عرض لا+۱۰ اور رقبہ (۲لا+۵۰)(لا+۱۰) ہوگا

پس $(۲لا+۵۰)(لا+۱۰) = ۲لا^۲ + ۶۸۰۰$

(۲۸) فرض کرو کہ فٹوں کے تعداد کو لا تعبیر کرتا ہے تو بموجب دفعہ ۱۷۱ کے

$$\frac{لا}{۸۰} + \frac{لا}{۲۰۰} + \frac{لا}{۳۰۰} = ۱$$

(۲۹) فرض کرو کہ آمدنی جو ۱۰۰ سالیانہ سے کم تھی اوسمیں پونڈ کی تعداد لا تھی تو ۵۰۰۰۰ − لا تعداد اوس آمدنی کی پونڈ کے ہوگی جو ۱۰۰ پونڈ سالیانہ سے زاید ہے تو $\frac{۷لا}{۲۴۰}$ اون پونڈوں کے تعداد ہوگی جو اول آمدنی سے وصول ہونگے اور $\frac{۵۰۰۰۰-لا}{۲۰}$ اون پونڈوں کے تعداد ہوگی جو دوسرے آمدنی سے پس

$$\frac{۷لا}{۲۴۰} + \frac{۵۰۰۰۰-لا}{۲۰} = ۱۸۲۵۰$$

(۳۰) فرض کرو کہ بڑی سی قیمت کے ایک سیر مرچوں میں کم قیمت مرچیں لا سیر ملائی تو ان ملی جلی مرچوں کے قیمت آنوں میں ۵ + ۳لا ہوگی اور وہ $\frac{۱۱}{۳}(لا+۱)$ آنوں کو فروخت ہوگی

پس $\frac{۱۱}{۳}(لا+۱) = ۵ + ۳لا + \frac{۵+۳لا}{۱۰}$

(۳۱) فرضکرو کہ نارنگیوں کی تعداد کو لا تعبیر کرتا ہے تو ۱۸۰ + لا سیبوں کی تعداد کو تعبیر کریگا ہر ایک سیب کے قیمت $\frac{۳}{۵}$ پائی ہے تو ۳۵ سیبوں کے قیمت ۲۱ پائی ہوگی ۵ نارنگیوں کی قیمت $۲۲\frac{۱}{۲}$ پائی ہوگی یعنی ایک نارنگی کی قیمت $\frac{۹}{۲}$ پائی اسلئے $\frac{۹لا}{۲} + \frac{۳}{۵}(لا+۱۸۰) = ۲۲۳۴$

(۳۲) فرضکرو کہ ا بیپہ مین سے جو گیلن نکالین اونکے تعداد لا ہی تو ب بیپہ سی جو گیلن نکالینگے اونکی تعداد ۱۴ - لا ہوگی - اب ا مین سی جو نکالا گیا ہے اوسمین سے ۲/۵ حصے شراب ہے اور ب مین سے جو نکالا گیا ہے اوسمین ۳/۴ شراب ہے پس ۲لا/۵ + ۳/۴ (۱۴ - لا) = ۷

(۳۳) فرض کرو کہ رادہا جتنی دنون مین خندق کہودتا ہی اونکی تعداد کو ۳لا تعبیر کرتا ہے تو سوہن جتنی دنون مین خندق کہودتا ہے اونکی تعداد کو ۲لا اور موہن جتنی دنونمین خندق کہودتا ہے اوسکی تعداد کو لا تعبیر کرتا ہی تو ۶ دن مین رادہا ۶/۳لا اور سوہن ۶/۲لا اور موہن ۶/لا حصے خندق کے کہودینگے اسیواسطے ۶/۳لا + ۶/۲لا + ۶/لا = ۱

(۳۴) فرض کرو کہ اوسکی امدنی کے پونڈون کے تعداد لا ہی تو ۷/۲۴۰ لا پونڈ وہ انکم ٹیکس کے دیتا ہے پس لا - ۷/۲۴۰ لا = ۴۰۸ ۱۳/۴۸۰

(۳۵) فرض کرو کہ جس وقت فرق مطلوب ہے اوسوقت ایک بجی پر جتنی منٹ گذری ہون اونکی تعداد لا ہو جب بڑی سوئی لا منٹ حصون پر گذریگی تو چہوٹی سوئی کہ اوسی بارہ دفعہ سست چلتی ہے لا/۱۲ حصے طی کریگی لیکن وہ ایک بجی پر ۵ حصے بڑی سوئی سے آگے ہے اسلئے

۵ + لا/۱۲ = لا - ۱

(۳۶) فرض کرو کہ جتنی دور جائے اوسکی میلون کی تعداد لا ہی تو وہ بگہی مین لا/۱۲ گہنٹوںمین جائیگا اور لا/۴ گہنٹون مین واپس ائیگا پس لا/۱۲ + لا/۴ = ۹

(۳۷) فرض کرو کہ بعد کمی محصول جو فی من محصول لیا گیا اوسکے انون کی تعداد لا ہے اب صرف اوس چیز کا ڈیوڑہا ہوگیا تو ۳لا/۲ آمدنی محصول ہوگی یہہ محصول ایک تہائی گہٹ گیا ہی یعنی امدنی محصول کے دو تہائی رہ گئی ہے اسلئے ۳لا/۲ = ۲/۳ × ۶

(۳۸) فرض کرو کہ جہاز مین جتنی آدمی تہے اونکی تعداد کو لا تعبیر کرتا ہے تو اوسمین ۶۰لا دن کے کہانے کا سامان ہوگا اب بیس روز بعد جب طوفان ایا تو ۲۰لا ذخیرہ صرف ہوا ہوگا اب ۱۵ ادمیوں کے مرنے کی بعد تعداد ادمیوں کی لا - ۵ ہوئی اور خوراک فی کس ۵/۶ (لا - ۵)

اور ۲۴ روز کا توقف ہو تو ۴۲ دن وہ ذخیرہ چلا اسلئی ۶۰ لا = ۲۰ لا + ۴۲ (لا - ۵)

گیارہوان باب

(۱۵) مساواتون کو سادہ بناؤ تو لا - ۵ ی = ۴۸ اور ۷ لا + ی = ۱۳۲

(۱۶) اول مساوات سے ۴۳ لا = ۹۱ ی اسواسطے ۱۱ لا = ۷ ی تو لا = ۷ی/۱۱ = (۱ + ۵ی)/۸

(۱۷) اول مساوات کو ۱۱ مین ضرب دیے ۸ لا - ۴۸ + ۶ ی + ۱۲ = ۱۱ لا - ۹۶ - ۹ ی + ۱ یعنی

۳۰ لا + ۱۵ ی = ۱۴۵ یعنی ۶ لا + ۳ ی = ۲۹ دوسرے مساوات ۶ مین ضرب دو تو

ی - ۳ لا + ۱۲ = ۱ - ۱۲ لا + ۳۶ یعنی ۹ لا + ی = ۲۵ اب اس مساوات کو ۳ مین ضرب دیکے

پہلے مساوات سے تفریق کرلو

(۱۸) ۴ لا + ۸ ی = ۲۴/۱ اور ۱/۲ لا - ۶ ی = ۳۴۸/۱۰۰ اب اول مساوات کو ۳ مین

اور دوسرے مساوات ۴ مین ضرب دیکر جمع کرلو

(۱۹) لا کے قیمت جو دوسری مساوات مین سے نکلے اوسکو اول مساوات مین رکھو

۱/۵ (۸ ی + ۷ ی) - ۱ = ۲/۱۳ (۸ ی - ۶ ی + ۱) یعنی ۳ ی - ۱ = ۴/۱۳ ی + ۲/۱۳ اب ۳ مین ضرب دے لو

(۲۰) اول مساوات کو ۴ مین ضرب دو ۴ لا + ۲ (۳ لا - ی - ۱) = ۱ + ۳ (ی - ۱) یعنی ۱۰ لا - ۵ ی = ۰

اسواسطے ی = ۲ لا اس قیمت کو دوسرے مساوات مین مندرج کرو ۱/۵ (۴ لا + ۶ لا) = ۱۴ لا/۱۰ + ۲

یعنے ۲ لا = ۷ لا/۵ + ۲

(۲۱) اول مساوات کو ۱۰ مین ضرب دیے ۵ (۳ لا - ۵ ی) + ۳۰ = ۲ (۲ لا + ی) یعنی ۱۱ لا - ۲۷ ی = - ۳۰

دوسرے مساوات کو ۱۲ مین ضرب دو تو ۹۶ - ۳ (لا - ۲ ی) = ۶ لا + ۴ ی یعنی ۹ لا - ۲ ی = ۹۶

(۲۲) اول مساوات کو ۸ مین ضرب دو ۴۵ لا - ۱۲ ی - ۸۰ = ۵ لا - ۱۰ ی یعنی ۳۹ لا - ۲ ی = ۸۰

دوسری مساوات کو ۶۰ مین ضرب دو ۱۲۰ - ۱۶۰ لا = ۵ لا - ۴ ی + ۴۴

یعنے ۱۱۵ لا + ۴ ی = ۲۲۶ اب پہلی مساوات کو ۲ مین ضرب دیکر دوسرے مساوات کے ساتھ جمع کرو

(۲۳) اول مساوات کو ۳۰ مین ضرب دو ۶ (۴ لا - ۳ ی - ۷) = ۹ لا - ۴ ی - ۲۵ یعنی ۵ لا - ۴ ی = ۱۷

دوسری مساواۃ کو ۹۰ مین ضرب دو ۲۰(ی − ۱) + ۳۰لا − ۹ی − ۶۰ = ۴(ی − لا) + ۱۰لا + ۶۶

یعنی ۴۴لا + ۷ی = ۱۸۶ اس مساواۃ کو ۲ مین ضرب دیکر پہلی مساوات کے ساتھ جمع کرو

(۲۴) اول مساواۃ کی یہہ صورت ہے کہ ۲ی/۳ (۲لا/۳ − ۵ی/۱۲) − ۲/۳۲ (۳لا/۲ − ی/۳) = ۲

یعنی ۸لا/۲۱ − ۵ی/۲۱ − ۳لا/۲۲ + ۲ی/۶۶ = ۲ اسکو ۲۱×۲۲ مین ضرب دو

۱۸۴لا − ۱۱۰ی − ۶۳لا + ۱۴ی = ۹۲۴ یعنی ۱۲۱لا − ۱۰۱ی = ۹۲۴

دوسری مساوات ۵لا − ۵ی = لا + ی یعنے ۴لا = ۶ی یعنے ۲لا = ۳ی

(۲۵) اول مساواۃ کو ۳×۵×۷×۸ مین ضرب دو ۲۸۰(۳لا − ۲ی) + ۸۴۰ + ۱۰۵(۱۱ی − ۱۰) =

۱۲۰(۴لا − ۳ی + ۵) + ۱۶۸(۴۵ − لا) یعنی ۸۴۰لا − ۵۶۰ی + ۸۴۰ + ۱۱۵۵ی − ۱۰۵۰

= ۴۸۰لا − ۳۶۰ی + ۶۰۰ + ۷۵۶۰ − ۱۶۸لا یعنی ۵۲۸لا + ۹۵۵ی = ۸۲۷۰

دوسری مساوات کو ۱۸ مین ضرب دو ۸۱۰ − ۲۴لا + ۱۲ = ۵۵لا + ۱۷ی + ۱ یعنی

۷۹لا + ۱۷ی = ۸۲۱ اول مساواۃ کو ۱۷ مین اور دوسری کو ۹۵۵ مین ضرب دیکر تفریق کر لو

(۲۶) اول مساوات ۲۴/۱۰ لا + ۳۲/۱۰۰ ی − (۳۶/۱۰۰ لا − ۵/۱۰۰)/(۵/۱۰) = ۸لا/۱۰ + (۲۶/۱۰ ی + ۵/۱۰۰۰ ی)/(۲۵/۱۰۰)

یعنی ۲۴/۱۰ لا + ۳۲/۱۰۰ ی − ۱۰/۵ (۳۶/۱۰۰ لا + ۵/۱۰۰) = ۸لا/۱۰ + ۱۰۰/۲۵ (۲۶/۱۰ ی + ۵/۱۰۰۰ ی)

۱۰۰ مین ضرب دو تو ۲۴۰لا + ۳۲ی − ۷۲لا + ۱۰ = ۸۰لا + ۱۰۴۰ی + ۲ی

یعنی ۸۸لا + ۳۰ = ۱۰۳۰ی اور اب دوسری مساوات (۴ی/۱۰ + ۱/۱۰)/(۲/۱۰) = (۷لا/۱۰ − ۱/۱۰)/(۶/۱۰)

یعنی ۱۰/۲ (۴ی/۱۰ + ۱/۱۰) = ۱۰/۶ (۷لا/۱۰ − ۱/۱۰) اب ۶/۱۰ مین ضرب دو

تو ۳(۴ی/۱۰ + ۱/۱۰) = ۷لا/۱۰ − ۱/۱۰ اب ۱۰۰ مین ضرب دو ۸۰ی + ۲۰ = ۷۰لا − ۱۰

یعنی ۷۰لا − ۸۰ی = ۳۰ اب پہلی مساوات کو ۴۰ مین ضرب دو اور دوسرے کو ۵۱ مین اور جمع کرو

(۲۷) اول مساوات کو ۶ مین اور دوسری کو ۱۱ مین ضرب دیکر جمع کر لو

(۲۸) اول مساوات کو ن مین ضرب دیا تو م ن/لا + ن²/ی = ن اور دوسرے

مساوات کو م مین ضرب دیا تو

م ن / لا + م۲ / ی = م تفریق کیا تو م۲ - ن۲ / ی = م - ن ∴ (م - ن) ی = م۲ - ن۲
اسلئے ی = م + ن اب پہلی اول مساوات کو م مین اور دوسری کو ن مین ضرب دیکر تفریق کرو
تو لا = م + ن کے حاصل ہوگا

(۲۹) دوسرے مساوات کو ۲ مین ضرب دیا تو ۲ / لا + ۶ / ی = ۳ اسکو پہلی مساوات سے تفریق کیا تو ۱ / لا = ۲

(۳۰) اول مساوات کو ن مین اور دوسرے کو ب مین ضرب دو اور جمع کرو تو (ن ا + م ب) لا = ن ح + ب د
اور پھر مساوات اول کو م مین اور دوم کو ا مین ضرب دیکر تفریق کرو تو (م ب + ا ن) ی = م ح - ا د

(۳۱) (ا + ح) لا + (ب + ح) ی = ۲ (ا + ح) (ب + ح) اور ا لا - ب ی = (ا - ب) ح
اب اول مساوات کو ب مین اور دوسرے کو ب + ح مین ضرب دیکر جمع کرو تو
لا (ا ح + ا ب) + ۲ ا ب) = ب۲ (ا + ب) + (۳ ا ب + ب۲) ح + ۲ ا ب۲ تقسیم کر کر
لا = ح + ب اب اس قیمت کو اول مساوات مین مندرج کرو تو ا (ح + ب) - ب ی = (ا - ب) ح
∴ ب ی = ب (ا + ح) ∴ ی = ا + ح

(۳۲) دوسرے مساوات کو ا + ب مین ضرب دو اور پہلی کے ساتھ جمع کرو تو ۲ ا لا = ۲ (ا۲ - ب۲) + ۴ ا ب (ا + ب)
= ۲ ا (ا۲ + ۲ ا ب + ب۲) = ۲ ا (ا + ب)۲ سواسطے لا = (ا + ب)۲ اس قیمت کو دوسرے مساوات مین
رکھو تو (ا + ب)۲ - ی = ۴ ا ب سواسطے ی = (ا + ب)۲ - ۴ ا ب = (ا - ب)۲

بارہوان باب

(۱۰) اول اور دوم کو جمع کیا تو ۲ / لا + ۱ / ی + ۱ / ی = ۳ اور تیسرے کو تفریق کیا تو ۲ / لا = ۳ / ۲ سواسطے لا = ۴ / ۳
اول اور دوم مساوات مین اس لا کی قیمت کو مندرج کرو تو باقی مجہول مقدار ونکی قیمت معلوم ہو جاویگی

(۱۱) اول اور دوم مساوات کو ۲ مین ضرب دو اور دوسرے کے ساتھ جمع کرو تو
۴ / لا + ۳ / ی = ۱۴ / ی + ۲ یعنی ۴ / لا - ۳ / ی = ۲ اب تیسری مساوات کو ۳ مین ضرب دیکر جمع کرو
تو ۷ / لا = ۶ سواسطے لا = ۷ / ۶ اسکو تیسری مساوات مین مندرج کرنے سے ی کی قیمت
اور دوسرے مین درج کرنے سے ی کی قیمت دریافت ہوگی

(۱۲) دوسرے تیسرے مساوات کو جمع کرو تو ۱۵/لا + ۹/ی = ۲۸۸/۳۰ اسواسطے ۱۶/لا + ۹/ی = ۴۸/۵ = ۳۴

اول مساوات کو ۵ مین اور دوسرے مساوات کو ۳ مین ضرب دیکر جمع کرو تو

۵۳/لا۲ + ۲۱/ی = ۳۵۸/۳ اسواسطے ۵۳/لا + ۴۳/ی = ۳۵۸

اول مساوات حاصل شدہ کو ۷ مین اور اس مساوات کو ۱۰ مین ضرب دیکر تفریق کرو تو ۲۱۱/لا = ۴۲۲

اسواسطے لا = ۱/۲

(۱۳) اول مساوات کو ۲۰ مین دوسرے کو ۱۲ مین تیسرے کو ۴۲ مین ضرب دو اور مساواتون کو مختصر صورت مین لکھو تو

۱۰لا + ۱۵ء - ۲۴ی = ۴۱ اور ۱۵لا - ۱۲ء + ۱۶ی = ۱۰ اور ۱۸لا - ۱۴ء - ۷ی = -۱۳

(۱۴) کسر کو دور کرا اور مختصر کرو تو ۳۵لا - ۳ء - ۱۵ی = ۰ اور ۳لا - ء - ی = -۴

اور ۱۲۵لا + ۱۲۹ء - ۱۰۵ی = ۰

(۱۵) اول مساوات کو ۷ مین اور تیسرے کو ۳ ضرب دیکر تفریق کرو تو ۴۹لا - ۱۲ی = ۴ اور

دوسرے مساوات کو ۳ مین اور چوتھی کو ۲ مین ضرب دو اور تفریق کرو تو ۳۳لا - ۳۳ی = ۴

(۱۶) اخر تین مساواتون سے قیمت لا و ء ی کے دریافت کرو اور اول مساوات سے و کی قیمت دریافت کرو

(۱۷) تیسرے مساوات کو ۳ مین اور چوتھی کو ۴ مین ضرب دو اور تفریق کرو

تو ۷ء + ۶لا = ۳۸ اور اول اور تیسرے مساوات کو تفریق کرو تو ۲لا - ۷ء = -۱ لیس

ان دونو مساواتون لا اور ء کے قیمت دریافت کرو

(۱۸) اول مساوات کو ۳ مین اور دوسرے کو ۷ مین ضرب دیکر تفریق کرو تو ۹۸لا - ۳۹ی = -۱۳۸

اب اس مساوات اور چوتھی مساوات سے لا اور ی کی قیمت دریافت کرو اور پھر تیسرے مساوات سے

ء کی اور دوسری سے و کی

(۱۹) دوسرے مساوات کو ۲ مین ضرب دو اور چوتھی مساوات کو تفریق کرو تو ۴ء + ۴ی + ۳و = ۱۴

اور اول مساوات کو ۳۹ مین اور تیسرے کو ۲ مین ضرب دیکر جمع کرو تو ۳۵ء - ۶ی + ۵و = ۱۰۷

ان دو مساواتون اور پانچوین مساوات سے ء اور ی اور و کی قیمت دریافت کرو

ا (ب − ا) (ح − ا) لا = ط (ب − ط) (ح − ط) اور علی ہذا القیاس ء اور ی کی لیے عمل کرو

(۲۶) لا ء ی پر تقسیم کرو تو ا/ءی = ا/لا − ا/ء − ا/ی اور علی ہذا القیاس ب/لای = ا/ء − ا/ی − ا/لا اور ح/لاء = ا/ی − ا/لا − ا/ء ان دوم و سوم مساواتونکو جمع کرو تو ب/لای + ح/لاء = ... ا/لا

(۲۷) لا + ء + ی = ا + ب + ح

ب لا + ح ء + ا ی = ا^2 + ب^2 + ح^2

ح لا + ا ء + ب ی = ا^2 + ب^2 + ح^2

ی کی قیمت اول مساوات مین سے نکال کر دوسری اور تیسری مساوات مین رکھی تو

(ب − ا) لا + (ح − ا) ء = ب^2 + ح^2 − ا (ب + ح)

(ح − ب) لا + (ا − ب) ء = ا^2 + ب^2 − ب (ا + ح)

اول کو ب − ا مین اور دوم کو ح − ا مین ضرب دو اور جمع کرو تو

لا [(ب − ا)^2 + (ح − ا) (ح − ب)] = (ب − ا) (ب^2 + ح^2 − ا ب − ا ح) + (ح − ا) (ا^2 + ح^2 − ب ا − ب ح)

یعنی لا [ا^2 + ب^2 + ح^2 − ا ب − ب ح − ح ا]

= − ا^3 + ب^3 + ح^3 − ۲ا^2 ب + ۲ا^2 ح − ۲ب^2 ا − ۲ح^2 ا − ا ب ح

اسواسطے تقسیم سے لا = ب + ح − ا اور علی ہذا القیاس ء اور ی کے واسطے

(۲۸) دوسرے مساوات کو اول مساوات سے تفریق کرو تو − (ا − ب) ء + (ا^2 − ب^2) ی = ا^3 − ب^3

ا − ب پر تقسیم کرو تو − ء + (ا + ب) ی = ا^2 + ا ب + ب^2 اب تیسرے مساوات کو دوم مساوات سے تفریق کرو تو − (ب − ح) ء + (ب^2 − ح^2) ی = ب^3 − ح^3 اب ب − ح پر تقسیم کرو تو

− ء + (ب + ح) ی = ب^2 + ب ح + ح^2 اب اول حاصل شدہ مساوات مین سے اس مساوات کو تفریق کرو تو (ا − ح) ی = ا^2 − ح^2 + ب (ا − ح)

ا − ح پر تقسیم کرو تو ی = ا + ح + ب

اس سے معلوم ہوا کہ ء = (ب + ح) (ا + ح + ب) − ب^2 − ب ح − ح^2 اس سے یہہ معلوم ہوتا ہے کہ

ی = اب + ب ح + ح ا ۔ اب لا اور ی کی قیمتون کو تینون مساواتون مین سے کسی ایک مساوات مین رکھو تو لا کی قیمت حاصل ہوجائیگی

تیرھوان باب

(۱) فرض کرو کہ کسر کے نسب نما کو ی اور شمار کنندہ کو لا تعبیر کرتا ہے تو موجب شرائط سوال کے

$\frac{لا+۳}{ی} = ۱$ اور $\frac{لا}{ی+۲} = \frac{۱}{۲}$

(۲) فرض کرو کہ زید کے پاس جو روپیہ تھا اُسکی تعداد کو لا اور دوسرے کے روپیہ کی تعداد کو ی تعبیر کرتا ہی تو

لا + ی = ۷۰ ۵ اور ۳ لا + ۵ ی = ۲۳۵۰

(۳) فرض کرو کہ شمار کنندہ کو لا اور نسب نما کو ی تعبیر کرتا ہی تو $\frac{لا+۱}{ی} = \frac{۱}{۴}$ اور $\frac{لا}{ی+۱} = \frac{۱}{۴}$

(۴) فرض کرو کہ لا اول عدد کو اور ی دوسرے عدد کو تعبیر کرتا ہی تو لا + ۴ ی = ۲۹ اور ی + ۴ لا = ۳۶

(۵) فرض کرو کہ موہن اور سوہن کے روپیونکی تعداد کو لا اور ی تعبیر کرتے ہین

لا + ۳۶ = ۳ ی اور ی − ۵ = $\frac{۱}{۲}$ لا

(۶) فرض کرو کہ موہن اور سوہن کے روپیونکی تعداد کو لا اور ی تعبیر کرتے ہین جب موہن ہارا تو

لا − ۱۰ = ۳ (ی + ۱۰) − ۲۵ اور جب سوہن ہاریگا تو ی − ۱۰ = $\frac{۵}{۱۲}$ (لا + ۱۰)

(۷) فرض کرو کہ لا اول عدد اور ی دوسرے عدد کو تعبیر کرتا ہے تو

۲ لا + ی = ۱۷ اور ۲ ی + لا = ۱۹

(۸) فرض کرو کہ اول عدد کو لا اور دوسرے عدد کو ی تعبیر کرتا ہے $\frac{لا}{۲} + \frac{۳ ی}{۴} = ۳ لا − ی$

اور ۳ لا − ی = ۱۱

(۹) فرض کرو چار لا روپیہ سیر اور قہوہ ی روپیہ سیر آیا تو ۳۲ لا + ۱۵ ی = ۱۰۵

اور ۳۶ لا + ۹ ی = ۱۰۵

(۱۰) فرض کرو کہ اعداد کو لا اور ی اور ی تعبیر کرتے ہین تو لا + ی + ی = ۹ اور

لا + ۲ ی + ۳ ی = ۲۲ اور لا + ۴ ی + ۹ ی = ۵۸

(۱۱) فرضکرو کہ چاے لا روپیہ سیر اور شکر ی روپیہ سیر آتی ہے تو لا + ۳ ی = ۶ اور

۳/۴ لا/۱۰ + ۳/۲ × ۳ ی = ۷

(۱۲) فرضکرو جو سرکاری کاغذ مین روپیہ لگایا اوسکی تعداد کو لا تعبیر کرتا ہی اور جو ریل مین روپیہ لگایا اوسکی تعداد کو ی تعبیر کرتا ہی تو لا + ی = ۱۲۵۵۰۰ اور ابسالیانہ امدنی سرکاری کاغذ کی سود سے ۳لا/۸۱ ہے اور ریل کے حصول سے ی/۲۴ یعنی ی/۲۴ ہی ∴ ۳لا/۸۱ = ی/۲۴ اسی سے ہم کو معلوم ہوگا ی = ۱۲۰۰۰ اسلئے ریل کے پچاس حصے خریدے

(۱۳) فرض کرو کہ اول آدمی کے سرمایہ مین روپیون کی تعداد لا تہی اور شرح سود فیصدی ی تو

(ی + ۱) (لا + ۱۰۰۰)/۱۰۰ = لا ی/۱۰۰ + ۸۰ اور ی + ۱/۱۰۰ (لا + ۱۵۰۰) = لا ی/۱۰۰ + ۱۵۰

اسیواسطے لا + ۱۰۰۰ ی + ۱۰۰۰ = ۸۰۰۰ اور ۲لا + ۱۵۰۰ ی + ۳۰۰۰ = ۱۵۰۰۰

(۱۴) فرض کرو کہ آدمیون کی تعداد لا تہی اور ہر یک آدمی کے حصہ مین ی روپیہ آئی ہی تو کل سرمایہ لا ی تہا پس (لا + ۴) (ی − ۱) = لا ی اور (لا − ۵) (ی + ۲) = لا ی

(۱۵) فرض کرو کہ ایک سوراخ سے جتنی بوتل پانی ایک گہنٹہ مین نکلتا ہی اوسکی تعداد لا ہی اور جو دوسرے سوراخ سے نکلتا ہی اوسکی تعداد ی ہی تو ۳لا + ۳ی + ۱۱ی = ۱۹۲ اور ۶لا + ۶ی + ۶ی = ۱۹۲

(۱۶) فرض کرو کہ اصل امدنی لا ہے اور دوسرے ٹیکس ی پنس فی پونڈ ہے تو

لا − ۷لا/۲۴۰ = ی لا/۲۴۰ = ۴۸۶ اور ی لا/۲۴۰ = ۷لا/۲۴۰ + ۲۲ ۱/۲

(۱۷) فرض کرو اول و دوم و سوم جماعت کے ادمیون کی تعداد کو لا اور ی اور ی تعبیر کرتے ہین تو

لا + ی − ی = ۴ (ی + ی − لا) − ۱۰۰

لا + ۲۰ = ی + ی − ۲۹ + ۱

لا + ی + ی = ۸ (ی − ی) + ۳۴

(۱۸) فرض کرو کہ کسان کے پاس لا پونڈ اور بیل کے قیمت ی پونڈ اور بہیڑ کے قیمت ی پونڈ تو

لا = ۴ی + ای اور لا = ۴ی + ۱۶ی + ۶/۲۰ (۴ + ۱۶) + ۹

اور بیل کے لیجانے مین ۶ شلنگ اور بہیڑ کے لیجانے مین ۱۶/۳ ای شلنگ خرچ پڑا اسواسطے کل خرچ

ریل کے کرایہ کا (۴ی + ۲۵۶ی/۳) شلنگ ہوا اور ۲۰ راس کے لیجانے مین بحساب
اوسط چھ شلنگ خرچ پڑا تھا اسلئی ۱۲۰ شلنگ خرچ ہوا تھا تو ۴ی + ۲۵۶ی/۳ = ۱۲۰

(۱۹) فرض کرو کہ موہن نے لا بازیان اور سوہن نے ی بازیان جیتین

۲لا − ۳ی = ۳ اور ۲(لا − ۱) − ۵(ی + ۱) = −۳۰

(۲۰) فرض کرو کہ ا اور ب اور س اور د اور ی پاس لا ر ی و حصہ روپیہ تھا تو

لا + ر/۲ = ۳۰ اور ر − ر/۲ + ی/۳ = ۳۰ اور ی − ی/۳ + و/۴ = ۳۰

و − و/۴ + حصہ/۵ = ۳۰ اور حصہ − حصہ/۵ = ۳۰ آخر مساوات سے حصہ کو دریافت کرو
اور و اور ی اور ر اور لا کو بہ ترتیب دریافت کرو

(۲۱) فرض کرو کہ فاصلہ لا میل ہی اور ڈاک گاڑی کی رفتار ی میل فی گھنٹہ ہی تو ریل کی ۱۲ میل فی گھنٹہ
پس (لا − ۱۵)/ی = لا/۱۲ + ۳ اور (۲لا/۳)/ی = (لا/۳)/۱۲ + ۳

(۲۲) فرض کرو کہ زید لا دن مین اور بکر ی دن مین کام کو بناتا ہے تو

۳۰/لا + ۳۰/ی = ۱ اور (۸ − ½۵ + ۳۰)/لا + (۴ − ½۵ + ۳۰)/ی = ۱

(۲۳) فرض کرو کہ زید لا منٹ مین اور بکر ی منٹ مین ایک میل مسافت طی کرتا ہے
تو اول دفعہ مین بکر ۱۷۶۰ − ۴۴ گز مسافت ۵۱ سکنڈ مین زیادہ بہ نسبت زید کے طی کرتا ہے
تو ی (۱۷۶۰ − ۴۴)/۱۷۶۰ = لا + ۵۱/۶۰ اور دوسری صورت مین زید (۱۷۶۰ − ۸۸) گز کو ۶ منٹ ۵ سکنڈ
مین بہ نسبت بکر کے کم وقت مین طی کرتا ہی تو
لا (۱۷۶۰ − ۸۸)/۱۷۶۰ = ی − ۱ ۱/۵

(۲۴) فرض کرو کہ پہاڑ کا فاصلہ جڑ سے چوٹی تک لا میل ہی اور فی گھنٹہ زید کے رفتار ی میل اور بکر کی رفتار ر میل ہی تو لا/ر وہ وقت ہی جسمین زید جڑ سے چوٹی پر چڑھ گیا تو لا/ر = لا/ی − ۱/۲ اور
۲/۳ر وہ وقت ہی جو زید کو راہ بھولنے مین ناحق لگا اسلئی لا/ر + ۲/۳ر = لا/ی − ۶/۶۰ اور
اور نیز لا/(ر/۲) = لا/ی + ۱/۶۰ − ۲۰/۶۰ اب اول مساوات کو دوم سے تفریق کرو تو ر کی قیمت دریافت ہو جائیگی

اور پہر تیسرے کو اول سے تفریق کرو تو لا دریافت ہوجائیگا

(۲۵) فرض کرو کہ سڑک کا طول لا میل ہے اور ٹرین کی رفتار ی میل فی گھنٹہ ہے۔ اب حادثہ جب واقع ہوا تو ٹرین کو لا - ی میل کی مسافت طے کرنی تھی یہہ مسافت کم شدہ رفتار سے (لا - ی)/(۳/۵ ی) گھنٹوں میں طے ہوگی پس ۲ + (لا - ی)/(۳/۵ ی) = لا/ی + ۳ اگر حادثہ پچاس میل بڑہ کر واقع ہوتا تو ۱ + ۵۰/ی گھنٹے کے بعد واقع ہوتا اور لا - ی - ۵۰ میل مسافت طے کرنی باقی رہے

پس ۲ + ۵۰/ی + (لا - ی - ۵۰)/(۳/۵ ی) = لا/ی + ۳ - ۱½ ہر مساوات کو ۳ ی میں ضرب دو تو

۶ی + ۵(لا - ی) = ۳لا + ۹ی اور ۶ی + ۱۵۰ + ۵(لا - ۵۰ - ی) = ۳لا + ۴½ی

(۲۶) فرض کرو کہ موہن پاس لا روپیہ اور سوہن پاس ی روپیہ اور رادہا پاس ی روپیہ ہے تو اول بازی کے بعد موہن پاس لا - ی - ی اور سوہن پاس ۲ی اور رادہا پاس ۲ی روپیہ ہوگا اب دوسری بازی کی بعد موہن پاس ۲لا - ۲ی - ۲ی اور سوہن پاس ۲ی - لا + ی + ی - ۲ی یعنے ۳ی - ی - لا اور رادہا پاس ۴ی روپیہ تہا اور تیسری بازی کے بعد موہن پاس ۴لا - ۴ی - ۴ی اور سوہن پاس ۶ی - ۲لا - ۲ی اور رادہا پاس

۴ی - (۲لا - ۲ی - ۲ی) - (۳ی - لا - ی) یعنی ۷ی - ی - لا پس ۴لا - ۴ی - ۴ی = ۱۶

اور ۶ی - ۲لا - ۲ی = ۱۶ اور ۷ی - ی - لا = ۱۶

(۲۷) فرض کرو کہ موہن لا دنوں اور سوہن ی دنوں میں کام کو پورا بناتا ہے تو م/لا + م/ی = ۱

اور ل/لا + (ل + ف)/ی = ۱

(۲۸) فرض کرو کہ ٹرین کی اصل رفتار لا میل فی گھنٹہ ہے اور الہ آباد سے ی میل فاصلہ پر حادثہ واقع ہوا تو رفتار کے گہٹ جانے سے ی/(ل لا) گھنٹے بجائے ی/لا کے لگے ی/(ل لا) = ی/لا + ا

اور اسیواسطے ل ی = ی + ا ل لا اور علیٰ ہذا القیاس (ی - ب)/(ل لا) = (ی - ب)/لا + ح اسیواسطے

ل (ی - ب) = ی - ب - ح ل لا دوسری مساوات کو اول مساوات میں سے تفریق کرو تو لا کی قیمت دریافت ہوجائیگی

(۲۹) فرض کرو کہ اگلے پہیہ کا محیط لا گز اور پچھلے کا ی گز ہے تو ۱۲۰/لا − ۱۲۰/ی = ۶
اور ۱۲۰/(۵لا/۴) − ۱۲۰/(۶ی/۵) = ۴

(۳۰) فرض کرو کہ دہائیوں کے تعداد کو لا اور اکائیوں کو ی تعبیر کرتا ہے تو عدد ۱۰لا + ی ہوگا تو
۱۰لا + ی = ۳(لا + ی) اور ۱۰لا + ی + ۴۵ = ۱۰ی + لا

(۳۱) فرض کرو کہ دہائیوں کی تعداد کو لا اور اکائیوں کی تعداد کو ی تعبیر کرتا ہے تو وہ عدد ۱۰لا + ی ہوگا
۱۰لا + ی = ۷(لا + ی) اور ۱۰لا + ی − ۲۷ = ۱۰ی + لا

(۳۲) فرضکرو کہ الف اور ب کی درمیان لا میل اور ب اور س کے درمیان ی میل اور س اور ب کے درمیان ء میل فاصلہ ہے اور ڈاک گاڑی و میل فی گھنٹہ جاتی ہے تو ۳و میل ریل گاڑی جائیگی

لا/و = ء/۳و + ی/۳و − ۱/۲ اسواسطے ۳لا = ء + ی − و

۲لا/و = ء/۶و + ی/۳و + ء/۲و اسواسطے ۶لا = ء + ۲ی

لا/و + ۱ = ء/۳و + (ی + ۱/۲ ی)/۳و اسواسطے ۶لا + ۶و = ۲ء + ۳ی

لا + ء + ی = ۶۷ ۱/۲

(۳۳) فرض کرو کہ چکر لا گز ہے اور زید کی اصل رفتار فی منٹ ء گز ہے اور بکر کی اصل رفتار فی منٹ ی گز
اب زید دو پورے چکر اور ۱۵۰ گز جتنی دیر میں طے کرتا ہے اوتنی دیر میں بکر پورے دو چکر کرتا ہے
اسلئے (۲لا + ۱۵۰)/ء = ۲لا/ی اور دوسرے دور میں زید ۴ء/۳ گز فی منٹ چار دفعہ چکر چلتا ہے اور بکر
۹ی/۸ گز فی منٹ ایک چکر میں اور دوسرے چکر میں ی گز فی منٹ اور تیسرے ۹ی/۱۰ گز فی منٹ
چلتا ہے مگر اس چکر میں ۱۸۰ گز اوسے طے کرنے باقی رہجاتے ہیں اسلئے

۴لا/(۴ء/۳) = لا/(۹ی/۸) + لا/ی + (لا − ۱۸۰)/(۹ی/۱۰) یعنی ۳لا/ء = ۱/ی [۸لا/۹ + لا + ۱۰(لا − ۱۸۰)/۹]

اس مساوات کی ارقام اول مساوات پر تقسیم کرو تو ۳لا/(۲لا + ۱۵۰) = ۸لا/۱۸لا + لا/۲لا + ۱۰(لا − ۱۸۰)/۱۸لا

یعنی ۳لا/(۲لا + ۱۵۰) = ۴/۹ + ۱/۲ + ۵/۹ − ۱۰۰/لا

اسواسطے ۱۰۰/لا = ۳/۲ − ۳لا/(۲لا + ۱۵۰) = ۴۵۰/(۲لا + ۱۵۰)۲

اسواسطے ۱۲۰۰لا + ۳۰۰۰۰ = ۴۵۰ لا اسواسطے لا = ۴۰۰

(۳۴) فرض کرو کہ گھوڑے کی رفتار فی گھنٹہ لا میل اور قاصد کی رفتار فی گھنٹہ ر میل ہے اور پھر بھی فرض کرو کہ ی گھنٹہ کے بعد یہ دو ملے اور چونکہ آدمی ف گھنٹہ پہلے چل چکا ہے اسلئے

(ف + ی) ر = ی لا . . . (۱)

اور بڑھی ہوئی چال سے گھوڑے کے ڈاک $\frac{۶لا}{۵}$ (ی + ق) − $\frac{۵ر}{۴}$ (ی + ق) = ۹۲ . . (۲)

اور نیز (لا − ر) (ی + ق) = ۸۰ . . (۳)

(۲) کو (۳) پر تقسیم کرو $\frac{\frac{۶لا}{۵} - \frac{۵ر}{۴}}{لا - ر} = \frac{۹۲}{۸۰}$

اسسے معلوم ہوتا ہے کہ لا = ۲ ر . . (۴)

(۱) سے ی = ف اسواسطے اگر ف + ق = ۱۶ ہو تو (۳) سے

لا − ر = $\frac{۸۰}{۱۶}$ = ۵ اسسے اور (۴) سے ہم لا اور ر کو دریافت کرسکتے ہیں

چودہواں باب

(۱) ۳ا − [ب + [۲ا − (ب − ح)]] = ۳ا − [− + [۲ا − ب + ح]]

= ۳ا − ۲ا − ح = ا − ح اور $\frac{\frac{۱}{۲} - ح^۲}{۱ + ح۲} = \frac{۱ - ۲ح^۲}{(۱ + ح۲) ۲} = \frac{۱ - ح۲}{۲}$

ا − ح + $\frac{۱}{۲}$ + $\frac{۱ - ح۲}{۲}$ = ا − ح + $\frac{۱}{۲}$ + ح − $\frac{۱}{۲}$ = ا

(۲) ۳لا⁴ + ۱۴لا³ + ۲۲لا² + ۲۱) ۹لا⁴ + ۱۰لا³ + ۲لا² − ۲۰لا − ۲۸ (۳لا − ۶

۶لا⁴ + ۲۸لا³ + ۴۴لا² + ۴۲لا

−۱۸لا³ − ۴۲لا² − ۶۲لا − ۲۸

−۱۸لا³ − ۸۴لا² − ۱۳۲لا − ۱۲۶

−۴۲لا² − ۱۷۰لا − ۹۸

−۱۴ اسپر تقسیم کیا ۳لا² + ۵لا + ۷) ۳لا⁴ + ۱۴لا³ + ۲۲لا² + ۲۱ (لا² + ۳

۳لا⁴ + ۵لا³ + ۷لا²

۹لا³ + ۱۵لا² + ۲۱

۹لا³ + ۱۵لا² + ۲۱

۳لا² + ۵لا + ۷ مقسوم علیہ اعظم

(۳) لا − ا = ا − $\frac{ا^۲}{ا - ب}$ = $\frac{اب}{ا - ب}$ ∴ $\frac{لا - ا}{ب}$ = $\frac{ا}{ا - ب}$ اور

یعنے ۶لا[ا^{2} - ۲ا ب + ب^{2}] = ۶ا^{3} + ۶ب^{3} - ۶ا^{2}ب - ۶ا ب^{2}

یعنے لا[ا^{2} - ۲ا ب + ب^{2}] = (ا + ب)(ا^{2} - ۲ا ب + ب^{2})

اسواسطے لا = ا + ب

(۹) لا + د + ی = ا + ب + ح

ب لا + ح د + ا ی = ا ب + ب ح + ح ا

ح لا + ا د + ب ی = ا ب + ب ح + ح ا

اول کو ا مین ضرب دو اور دوم کو اسے تفریق کرو تو

(ا - ب) لا + (ا - ح) د = ا^{2} - ب ح

اور اول مساوات کو ب مین ضرب اور سوم کو تفریق کرو تو

(ب - ح) لا + (ب - ا) د = ب^{2} - ح ا

اب پہلی مساوات کو ب - ح مین اور دوسرے کو ا - ب مین ضرب دو اور جمع کرو تو

لا[(ا - ب)^{2} + (ا - ح)(ب - ح)] = (ا - ب)(ا^{2} - ب ح) + (ا - ح)(ب^{2} - ا ح)

یعنی لا[ا^{2} + ب^{2} + ح^{2} - ا ب - ا ح - ب ح] = ا(ا^{2} + ب^{2} + ح^{2} - ا ب - ا ح - ب ح)

اسواسطے لا = ا

(۱۰) لا^{3} + ۶لا^{2} + ۱۱لا + ۶) لا^{4} + ۷لا^{3} + ۱۴لا^{2} + ۸لا

لا^{3} + ۶لا^{2} + ۱۱لا + ۶

لا^{2} + ۳لا + ۲) لا^{3} + ۶لا^{2} + ۱۱لا + ۶ (لا + ۳

لا^{3} + ۳لا^{2} + ۲لا

۳لا^{2} + ۹لا + ۶

۳لا^{2} + ۹لا + ۶

اب اول دو جملوں کا مقسوم علیہ اعظم لا^{2} + ۳لا + ۲ ہی اسیواسطے اوسکا ذو اضعاف اقل

(لا + ۳) (لا^{4} + ۷لا^{3} + ۱۴لا^{2} + ۸لا) یعنی لا^{5} + ۱۰لا^{4} + ۳۵لا^{3} + ۵۰لا^{2} + ۲۴لا ہے

اور یہہ تیسرے اور چوتھے جملوں پر پورا تقسیم ہوتا ہے اسلئے یہی مقسوم علیہ اعظم ہے

پندرھواں باب

(۱) لا^۴ + ۲لا^۳ − ۱۰لا^۲ − ۱۱لا − ۱۲) لا^۵ + ۳لا^۴ − ۷لا^۳ − ۲۱لا − ۳۶ (لا + ۱

لا^۵ + ۲لا^۴ − ۱۰لا^۳ − ۱۱لا^۲ − ۱۲لا

لا^۴ + ۳لا^۳ − ۱۰لا^۲ − ۲۴لا

لا^۳ + ۳لا^۲ − ۱۰لا − ۲۴) لا^۴ + ۲لا^۳ − ۱۰لا^۲ − ۱۱لا − ۱۲ (لا − ۱

لا^۴ + ۳لا^۳ − ۱۰لا^۲ − ۲۴لا

− لا^۳ + ۱۳لا − ۱۲

− لا^۳ − ۳لا^۲ + ۱۰لا + ۲۴

۳لا^۲ + ۳لا − ۳۶

۳ پر تقسیم کیا تو لا^۲ + لا − ۱۲) لا^۳ + ۳لا^۲ − ۱۰لا − ۲۴ (لا + ۲

لا^۳ + لا^۲ − ۱۲لا

۲لا^۲ + ۲لا − ۲۴

۲لا^۲ + ۲لا − ۲۴

پس لا^۲ + لا − ۱۲ مقسوم علیہ اعظم ہوا

(۳) ۲ / (۲ − ی) = ۲ / (۲ − ۲/(لا − ۲)) = ۲(لا − ۲) / (۲لا − ۴ − ۲) = (لا − ۲) / (لا − ۳)

۲ / (۲ − ی) = ۲ / (۲ − (لا − ۲)/(لا − ۱)) = ۲(لا − ۱) / (۲لا − ۲ − لا + ۲) = ۲(لا − ۱) / لا

۲ / (۲ − د) = ۲ / (۲ − ۲(لا − ۱)/لا) = ۲لا / (۲لا − ۲لا + ۲) = ۲لا / ۲ = لا

(۴) جملہ کا نسب نما متحد کرو اور شمار کنندہ

= ص(ص − ب)(ص − ح) + ص(ص − ا)(ص − ح) + ص(ص − ا)(ص − ب) − (ص − ا)(ص − ب)(ص − ح)

= ص[۳ص^۲ − ۲ص(ا + ب + ح) + بح + حا + اب] − [ص^۳ − ص^۲(ا + ب + ح) + ص(اب + بح + حا) − ابح]

= ۲ص^۳ − ص^۲(ا + ب + ح) + ابح = ابح

(ص − ا)(ص − ب)(ص − ح)

(۵) دفعہ ۱۱ مین ثابت ہوا ہے کہ ہر ایک جملہ جو ط اور ص کا دفق ہے وہ د کا بھی دفق ہے پس اسے ثابت ہوا کہ کل دفقون کا ذو ضعاف مشترک ہے ۔ اور چونکہ د اوس جملہ کو پورا نہین تقسیم کر سکتا جو اوسی اوتنے درجہ کا ہو اسلئے ذو ضعاف اقل تمام مقسوم علیہون کا ہوا

(۶) ہر ایک طرف کے اجزاء ضربی کو باہمین ضرب دو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$لا^۴ - ۲۲ لا^۳ + ۱۶۴ لا^۲ - ۴۵۸ لا + ۳۱۵$$

$$= لا^۴ - ۲۲ لا^۳ + ۱۶۴ لا^۲ - ۴۸۸ لا + ۴۸۰$$

(۷) اول مساوات کو ح مین ضرب دیکے دوسری مساوات کو تفریق کرو تو

$$(ح - ا) لا + (ح - ب) ی = ۰$$

اسواسطے $ی = \frac{(ح - ا) لا}{ب - ح}$ اول مساوات کو ب مین ضرب دو اور دوسرے کو تفریق کرو تو

$(ب - ا) لا + (ب - ح) ی = ۰$ اسواسطے $ی = \frac{(ا - ب) لا}{ب - ح}$ تیسرے مساوات مین

ی اور ی کی قیمتین رکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$لا \left\{ ب ح + \frac{ح (ح - ا)}{ب - ح} + \frac{ا ب (ا - ب)}{ب - ح} \right\} + (ا - ب)(ب - ح)(ح - ا) = ۰$$

پس اس سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ $\frac{لا (ا - ب)(ب - ح)(ح - ا)}{ب - ح} = (ا - ب)(ب - ح)(ح - ا)$

(۹) فرض کرو کہ بچے کیواسطے لا روپیہ اور بہائی کیواسطے ی روپیہ چھوڑ مرا تو

$$۵ لا + ۳ ی = ۱۱۲۶۷۰ \text{ اور } لا - \frac{لا}{۵۰} = ۲ \left(ی - \frac{۳ ی}{۱۰۰} \right)$$

(۱۰) کسر دور کی $(لا - ۱۳)(لا + ۱۲)(لا + ۱) + ۲ (لا + ۱۶)(لا + ۱۲)(لا + ۱) + ۳ (لا + ۱۶)$ $(لا - ۱۳)(لا - ۱)$

$$= ۶ (لا + ۱۲)(لا - ۱۳)(لا + ۱۶)$$

$$لا^۳ - ۷ ا^۲ لا - ۶ ا^۳ + ۲ (لا^۳ + ۹۹ لا^۲ + ۲۰ ا^۲ لا + ۱۲ ا^۳) + ۳ (لا^۳ + ۴ ا لا^۲ - ا^۲ لا - ۱۸ ا^۳)$$

$$= ۶ (لا^۳ + ۵ ا لا^۲ - ۱۲ ا^۲ لا - ۳۶ ا^۳)$$

اسواسطے $- ۱۲ ا^۲ لا - ۳۶ ا^۳ = - ۲۰ ا^۲ لا - ۲۱۶ ا^۳$

اسواسطے $۶۰ لا = - ۱۸۰ ا$ اسواسطے $لا = - ۱۳$

سولہوان باب

اس باب کی ساری مثالین ضرب کے معمولی قاعدہ سے حل ہوجاتی ہین انکی شرح کی ضرورت نہین ہے

(۳۱) مجذور کرنے سے اَ(ب − لا) = بَا(ا − لا) اور (اَ − بَا) لا = ا ب(ا − ب)

(۳۲) انتقال اور مجذور کرنے سے لا + ا = لا + ب − ۲ح (لا + ب)^½ + ح

۲ √ح(لا + ب) = ب + ح − ا اور ۴ح(لا + ب) = (ب + ح − ا)²

بیسواں باب

(۱۰) ۴لا² − ۴لا − ۳ = ۰ آگے عمل معمولی (۱۱) ۶لا² − ۱۸ = لا − ۱۳ آگے عمل معمولی

(۱۵) لا² − ۳لا + ۲ = ۹ آگے عمل معمولی (۱۹) ۳لا² − ۵لا + ۲ = ۱۴ آگے عمل معمولی

(۲۰) ۲لا² − ۹لا + ۱۰ = ۱۲لا − ۳۰ (۲۱) ۴لا² − ۱۲لا + ۹ = ۸لا

(۲۴) ۱۰۰لا² + ۱۹۶لا + ۷۳ = ۰

(۲۵) لا² − ۵/۶ + ۱/۶ + لا² − ۷/۱۲ + ۱/۱۲ = لا² − ۹لا/۲۰ + ۱/۲۰

(۲۶) ۶لا میں ضرب دو ۳لا² + ۱۲ = ۲لا² + ۱۸

(۲۷) ۲۵لا(لا + ۱) − ۱۵(۲لا² + لا − ۱) = ۱۲(لا + ۱)

(۳۰) لا(لا + ۵) + ۱۴۷ = ۲۳(لا + ۵) (۳۱) ۱۴۷ − لا(۵ − لا) = ۲۳(۵ − لا)

(۳۲) ۴(لا² − ۱) میں ضرب دو تو ۲(لا + ۱) + ۱۲ = لا² − ۱

(۳۳) ۸(لا² − ۱) میں ضرب دو تو ۱۲ + ۲لا(لا − ۱) = ۳(لا² − ۱)

(۳۴) ۱۹لا(۱۰ − لا) + ۴۰ × ۹۵ = ۹(۱۰۰ − لا²)

(۳۵) ۷۶لا(۱۰ + لا) + ۱۹۰(۳لا − ۵۰) = ۳(۱۰ + لا)(۱۲لا + ۷۰)

(۳۶) لا(لا² − ۵لا) = لا(لا² − ۹) + لا + ۳ اسواسطے ۵لا² = −۸لا + ۳

(۳۷) ۶لا(لا + ۲) − ۳(لا − ۱)(لا − ۴) = ۱۴لا(لا − ۱)

(۳۸) ۲لا² = ۳لا(لا − ۱) + ۲(لا − ۱)² باہم اسطرح عمل کریں کہ لا/(لا − ۱) کے جگہہ ی رکھیں تو مساوات یہہ ہوجائیگی کہ ی = ۳/۲ + ۱/ی اسواسطے ی² = ۳/۲ ی + ۱ اس مساوات کے حل کرنے سے ی = ۲ یا −½ کے حاصل ہوتا ہے اول قیمت کے موافق لا/(لا − ۱) = ۲ سے

لا = ۲ کے حاصل ہوتا ہے اور دوسری قیمت کے موافق $\frac{لا}{لا-۱} = -\frac{۱}{۲}$ اسسے لا = $\frac{۱}{۳}$

اسی ترکیب کو ۳۹ و ۴۰ و ۴۱ و ۴۲ و ۴۶ و ۴۷ مثالون مین کام لانے سے اختصار عمل ہوجاتا ہے

(۴۳) $۵(لا+۲) - ۱۰(لا-۲) = ۳(لا^{۲}-۴)$

(۴۴) $۴(لا+۲)(لا+۳) + ۵(لا+۱)(لا+۳) = ۱۲(لا+۱)(لا+۲)$

(۴۵) $۵لا(لا+۴) + ۳(لا+۲)(لا+۴) = ۱۴لا(لا+۲)$

(۴۸) $(لا+۳)(لا-۲)(لا-۱) + (لا-۳)(لا+۲)(لا-۱) = (لا+۲)(لا-۲)(۲لا-۳)$

یا اسطرح کہ $\frac{لا+۳}{لا+۲} = \frac{لا+۲+۱}{لا+۲} = ۱ + \frac{۱}{لا+۲}$ اور اسی طرح اور کسرون کے صورت بناکر

ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ $۱ + \frac{۱}{لا+۲} + ۱ - \frac{۱}{لا-۲} = ۲ - \frac{۱}{لا-۱}$ اسواسطے

$$\frac{۱}{لا+۲} - \frac{۱}{لا-۲} = -\frac{۱}{لا-۱}$$

(۵۰) $۴۹لا^{۲} - ۲۸لا - ۲۱ = ۰$

(۵۱) $لا^{۲} + \frac{۲-\sqrt{۳}}{۷-۴\sqrt{۳}}لا = \frac{۲}{۷-۴\sqrt{۳}}$ اب نسب نما کو منطق بنایا تو

$$لا^{۲} + \frac{(۲-\sqrt{۳})(۷+۴\sqrt{۳})}{۴۹-۴۸}لا = \frac{۲(۷+۴\sqrt{۳})}{۴۹-۴۸}$$

یعنی $لا^{۲} + (۲+\sqrt{۳})لا = ۱۴ + ۸\sqrt{۳}$ اب مجذور کامل $\left(\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲}\right)^{۲}$ طرفین پر زیادہ کرنے سے

تو $\left(لا + \frac{۲+\sqrt{۳}}{۲}\right)^{۲} = \frac{۶۳+۳۶\sqrt{۳}}{۴}$ اسواسطے $لا + \frac{۲+\sqrt{۳}}{۲} = \pm\frac{۶+۳\sqrt{۳}}{۲}$

(۵۲) $لا^{۲} - ۲ا لا + ا^{۲} = ب^{۲}$ یعنی $(لا-ا)^{۲} = ب^{۲}$

(۵۳) $لا^{۲} - ۲ا لا = ب^{۲}$ اسواسطے $(لا-ا)^{۲} = ا^{۲} - ب^{۲}$

(۵۴) $۲(ا^{۲}-ب^{۲})لا^{۲} - ۴(ا^{۲}+ب^{۲})لا = ۲(ب^{۲}-ا^{۲})$ اسواسطے $لا^{۲} - \frac{۲(ا^{۲}+ب^{۲})}{ا^{۲}-ب^{۲}}لا = -۱$

$\frac{ا^{۲}+ب^{۲}}{ا^{۲}-ب^{۲}}$ زیادہ کرو تو $\left(لا - \frac{ا^{۲}+ب^{۲}}{ا^{۲}+ب^{۲}}\right)^{۲} = \left(\frac{ا^{۲}+ب^{۲}}{ا^{۲}-ب^{۲}}\right)^{۲} - ۱ = \frac{۴ا^{۲}ب^{۲}}{(ا^{۲}-ب^{۲})^{۲}}$

اسواسطے $لا - \frac{ا^{۲}+ب^{۲}}{ا^{۲}-ب^{۲}} = \pm\frac{۲اب}{ا^{۲}-ب^{۲}}$ اسواسطے $لا = \frac{ا^{۲} \pm ۲اب + ب^{۲}}{ا^{۲}-ب^{۲}} = \frac{(ا \pm ب)^{۲}}{ا^{۲}-ب^{۲}}$

اگر اوپر کے علامت لین تو $لا = \frac{ا+ب}{ا-ب}$ اور اگر نیچے کے علامت لین تو $لا = \frac{ا-ب}{ا+ب}$

(۵۵) (لا-ب) (لا-ح) + (لا-ا) (لا-ح) + (لا-ا) (لا-ب) = ۰ اسواسطے

۳ لا² - ۲ لا (ا + ب + ح) + ب ح + ح ا + ا ب = ۰

لا² - ۲(ا + ب + ح) لا / ۳ + ((ا + ب + ح)/۳)² = ((ا + ب + ح)/۳)² - (ب ح + ح ا + ا ب)/۳

(۵۶) (ا + ح) (ا + ب) + (لا - ب) (لا - ح) = (ا + ب) (لا - ب) + (ا + ح) (لا - ح)

لا² - ۲ لا (ا + ب + ح) + ا² + ب² + ح² + ۲ ب ح + ۲ ح ا + ۲ ا ب = ۰

اسواسطے (لا - ا - ب - ح)² = ۰ اسواسطے لا = ا + ب + ح

(۵۷) ا ب لا = ب لا (ا + ب + لا) + ا لا (ا + ب + لا) + ا ب (ا + ب + لا)

(ا + ب) لا² + (ا² + ۲ ا ب + ب²) لا + ا ب (ا + ب) = ۰

اسواسطے لا² + (ا + ب) لا = - ا ب

اسواسطے (لا + (ا + ب)/۲)² = ((ا + ب)/۲)² - ا ب = (ا - ب)²/۴

(۵۸) ا ب لا² - (ا² + ب²) لا = ح² - ا ب اور لا² - (ا² + ب²)/ا ب لا = (ح² - ا ب)/ا ب

(لا - (ا² + ب²)/۲ ا ب)² = (ا² + ب²)²/۴ ا² ب² + (ح² - ا ب)/ا ب = ((ا² - ب²)² + ۴ ا ب ح²)/۴ ا² ب²

(۵۹) ا (لا - ب) (لا - ح) + ب (لا - ا) (لا - ح) = ۲ ح (لا - ا) (لا - ب)

(ا + ب - ۲ ح) لا² - [۲ ا ب - ح (ا + ب)] لا = ۰ اسواسطے لا = ۰ یا ۲ ا ب - ا ح - ب ح / ا + ب - ۲ ح

(۶۰) ا ب لا² + (۳ ا² + ب²)/ح لا = (۶ ا² + ا ب - ۲ ب²)/ح²

اسواسطے لا² + (۳ ا² + ب²)/ا ب ح لا = (۶ ا² + ا ب - ۲ ب²)/ا ب ح²

اسواسطے (لا + (۳ ا² + ب²)/۲ ا ب ح)² = (۶ ا² + ا ب - ۲ ب²)/ا ب ح² + ((۳ ا² + ب²)/۲ ا ب ح)² = (۹ ا⁴ + ۲۴ ا³ ب + ۱۰ ا² ب² - ۸ ا ب³ + ب⁴)/۴ ا² ب² ح²

اسواسطے لا + (۳ ا² + ب²)/۲ ا ب ح = ± (۳ ا² + ۴ ا ب - ب²)/۲ ا ب ح

(۶۱) کسر دور کرکے سادہ بناؤ تو

لا² (ا + ب + ح) - ۲ لا (ب ح + ح ا + ا ب) + ۳ ا ب ح = ۰

اسطرح عمل کرنا زیادہ فائدہ مند ہے کہ

(لا+ا)/(لا−ا) − ۱ + (لا+ب)/(لا−ب) − ۱ + (لا+ح)/(لا−ح) − ۱ = ۱۰ اسواسطے

۲ا/(لا−ا) + ۲ب/(لا−ب) + ۲ح/(لا−ح) = ۰ اسواسطے

ا(لا−ب)(لا−ح) + ب(لا−ح)(لا−ا) + ح(لا−ا)(لا−ب) = ۰

(۴۲) کسر دور کرکے اختصار کرو تو یہہ حاصل ہوگا

[۲ح² + ۳ح] لا² + الا(۳ح² + ۲ح − ۱) − ا²(۱ + ح) = ۰

[لا + ا(۲ح² + ۲ح − ۱)/(۴ح² + ۶ح)]² = ا²(۱ + ح)/(۲ح² + ۳ح) + ا²(۲ح² + ۲ح − ۱)²/(۴(۲ح² + ۳ح)²)

= ا²(۴ح⁴ + ۱۶ح³ + ۲۰ح² + ۸ح + ۱)/(۴(۲ح² + ۳ح)²) اسواسطے

لا + ا(۲ح² + ۲ح − ۱)/(۴ح² + ۶ح) = ± ا(۲ح² + ۴ح + ۱)/(۴ح² + ۶ح)

اکیسواں باب

(۱) لا² + ۲لا/۳ + ۱/۹ = ۱/۳ + ۱/۹ = ۴/۹

(۲) لا² + ۳۱لا + (۳۱/۲)² = ۳۲ + (۳۱/۲)² = ۱۰۸۹/۴

(۳) لا² + ۱۴لا + ۴۹ = ۱۱۰۷ + ۴۹ = ۱۱۵۶

(۴) ۱/لا² − ۱۳/لا + (۱۳/۲)² = ۱۴ + ۱۶۹/۴ = ۲۲۵/۴ اسواسطے

۱/لا − ۱۳/۲ = ± ۱۵/۲

(۵) لا² − ۳۵لا + (۳۵/۲)² = −۲۱۶ + (۳۵/۲)² = ۳۶۱/۴

(۶) ۱/لا² − ۱/لا + ۱/۴ = ۲ + ۱/۴ = ۹/۴ اسواسطے ۱/لا − ۱/۲ = ± ۳/۲

(۷) لا + ۲√ا√لا = −ح اسواسطے لا + ۲√ا√لا + ا = ا − ح اسلئے √لا + √ا = ± √(ا − ح)

(۸) لا² − ۷/۳ لا + ۴۹/۳۶ = ۴۳۰۷۶/۳ + ۴۹/۳۶ = ۵۱۶۹۶۱/۳۶

(۹) لا² − ۱۴لا + ۴۹ = ۴۹ − ۴۰ = ۹ اور لا − ۷ = ± ۳

(۱۰) ۲/لا² + ۵ = ۳/لا یعنی ۱/لا² − ۳/۲ · ۱/لا = −۵/۲ اور ۱/لا² − ۱۳/۲ · ۱/لا + ۱۶۹/۴۴ = −۵/۲ + ۱۶۹/۴۴ = ۹/۴۴

اسواسطے $(19+8\sqrt{6})\,\text{لا}^2+(34+12\sqrt{6})\,\text{لا}=53+20\sqrt{6}$

اسواسطے $\text{لا}^2+\frac{34+12\sqrt{6}}{19+8\sqrt{6}}\,\text{لا}=\frac{53+20\sqrt{6}}{19+8\sqrt{6}}$

اسواسطے $\text{لا}^2+\frac{(19-8\sqrt{6})(34+12\sqrt{6})}{23}\,\text{لا}=\frac{(19-8\sqrt{6})(53+20\sqrt{6})}{23}$

یعنی $\text{لا}^2+\frac{70-44\sqrt{6}}{23}\,\text{لا}=\frac{47-44\sqrt{6}}{23}$

مجذور پورا کرنے سے ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے

$$\left(\text{لا}+\frac{70-44\sqrt{6}}{46}\right)^2=\frac{12192-2112\sqrt{6}}{(46)^2}=\left(\frac{24-44\sqrt{6}}{46}\right)^2$$

(۵۶) انتقال درمجذور سی $\text{لا}^2+\text{ا}\,\text{لا}-1=(\sqrt{\text{ا}}+\sqrt{\text{ب}})^2-2(\sqrt{\text{ا}}+\sqrt{\text{ب}})\sqrt{\text{لا}^2+\text{ب}\,\text{لا}-1}+\text{لا}^2+\text{ب}\,\text{لا}$

اسواسطے $2\sqrt{\text{لا}^2+\text{ب}\,\text{لا}-1}=\sqrt{\text{ا}}+\sqrt{\text{ب}}-(\sqrt{\text{ا}}-\sqrt{\text{ب}})\,\text{لا}$

اسواسطے $\text{لا}^2\left[4-(\sqrt{\text{ا}}-\sqrt{\text{ب}})^2\right]+2(\text{ا}+\text{ب})\,\text{لا}=4+(\sqrt{\text{ا}}+\sqrt{\text{ب}})^2$

لا۲ کے امثال پر تقسیم کرو اور مجذور کو کامل بناؤ تو

$$\left[\text{لا}+\frac{\text{ا}+\text{ب}}{4-(\sqrt{\text{ا}}-\sqrt{\text{ب}})^2}\right]^2=\frac{4+(\sqrt{\text{ا}}+\sqrt{\text{ب}})^2}{4-(\sqrt{\text{ا}}-\sqrt{\text{ب}})^2}+\frac{(\text{ا}+\text{ب})^2}{\left[4-(\sqrt{\text{ا}}-\sqrt{\text{ب}})^2\right]^2}=\frac{4+2\sqrt{\text{ا}\text{ب}}}{\left[4-(\sqrt{\text{ا}}-\sqrt{\text{ب}})^2\right]^2}$$

(۵۷) $\text{لا}^3+2\text{لا}^2+\text{لا}=0$ اسواسطے $\text{لا}=0$ اور $\text{لا}^2+2\text{لا}+1=0$

(۵۸) $\text{لا}^3+\text{ب}\,\text{لا}^2+\text{ا}\,\text{لا}=0$ اسواسطے $\text{لا}=0$ اور $\text{لا}^2+\text{ب}\,\text{لا}+\text{ا}=0$

(۵۹) $\text{لا}^3-\text{لا}^2(\text{ا}+\text{ب}+\text{ح})+\text{لا}(\text{ب}\text{ح}+\text{ح}\text{ا}+\text{ا}\text{ب})=0$

اسواسطے $\text{لا}=0$ اور $\text{لا}^2-\text{لا}(\text{ا}+\text{ب}+\text{ح})=-(\text{ب}\text{ح}+\text{ح}\text{ا}+\text{ا}\text{ب})$

اسواسطے $\left[\text{لا}-\frac{\text{ا}+\text{ب}+\text{ح}}{2}\right]^2=-(\text{ب}\text{ح}+\text{ح}\text{ا}+\text{ا}\text{ب})+\frac{(\text{ا}+\text{ب}+\text{ح})^2}{4}$

(۶۰) $\frac{2\text{لا}}{1-\text{لا}^2}=\frac{4\text{لا}}{1+\text{لا}^2}$ اسواسطے $\text{لا}(1+\text{لا}^2)=2\text{لا}(1-\text{لا}^2)$ اسواسطے $\text{لا}=0$

یعنی $1+\text{لا}^2=2(1-\text{لا}^2)$

(۶۱) $\frac{1}{\text{لا}+\text{ا}+\text{ب}}+\frac{1}{\text{لا}-\text{ا}-\text{ب}}+\frac{1}{\text{لا}-\text{ا}+\text{ب}}+\frac{1}{\text{لا}+\text{ا}-\text{ب}}=0$ اسواسطے

$\frac{2\text{لا}}{\text{لا}^2-(\text{ا}+\text{ب})^2}+\frac{2\text{لا}}{\text{لا}^2-(\text{ا}-\text{ب})^2}=0$ اسلئے $\text{لا}\left[\text{لا}^2-(\text{ا}-\text{ب})^2\right]+\text{لا}\left[\text{لا}^2-(\text{ا}+\text{ب})^2\right]=0$

اسواسطے $\text{لا}=0$ اور $2\text{لا}^2=(\text{ا}+\text{ب})^2+(\text{ا}-\text{ب})^2$

(۶۲) (ا − لا)(لا + م)(لا − ن) = (ا + لا)(لا − م)(لا + ن)

اسواسطے − لا^3 + لا^2(ا + ن − م) + لا(م ن + م ا − ن ا) − ا م ن

= لا^3 + لا^2(ا − م + ن) + لا(ن ا − م ا − م ن) − ا م ن

اسواسطے لا = ۰ اور لا^2 = م ن + (م − ن) ا

(۶۳) ((ا + لا)/(ا − لا))^2 − ۱ = ح لا/ا ب اسواسطے ۴ ا لا/(ا − لا)^2 = ح لا/ا ب

اسواسطے ۴ ا^2 ب لا = ح لا (ا − لا)^2 اسواسطے لا = ۰ یعنی ۴ ا^2 ب = ح (ا − لا)^2

(۶۴) انتقال اور مجذور کرنے سے (۲ لا + ۱)^2 + ۲ لا (۲ لا + ۱) √(لا (لا + ۲)) + لا^2 (لا + ۲)

= (لا + ۱)^2 (لا^2 + ۲ لا + ۳) اسواسطے

۴ لا (۲ لا + ۱) √(لا^2 + ۲) = ۴ لا^3 + ۲ لا^2 + ۴ لا + ۲ = ۲ (لا^2 + ۱)(۲ لا + ۱) اسواسطے

(۲ لا + ۱) [لا √(لا^2 + ۲) − (لا^2 + ۱)] = ۰

اسواسطے کیا تو ۲ لا + ۱ = ۰ یا لا √(لا^2 + ۲) − (لا^2 + ۱) = ۰ اول مساوات لا = −$\frac{1}{2}$

اور آخر سے لا^2 (لا^2 + ۲) = (لا^2 + ۱)^2 یعنے

لا^4 + ۲ لا^2 = لا^4 + ۲ لا^2 + ۱ یہہ ناممکن ہے

(۶۵) لا^2 − ۲ لا + ۲ − ۲ √(لا^2 − ۲ لا + ۲) + ۱ = ۰ جذر

√(لا^2 − ۲ لا + ۲) − ۱ = ۰ اسواسطے √(لا^2 − ۲ لا + ۲) = ۱ مجذور کرنے

(۶۶) لا^2 + ۵ لا + ۲۸ − ۵ √(لا^2 + ۵ لا + ۲۸) = ۲۴ اسواسطے

[√(لا^2 + ۵ لا + ۲۸) − $\frac{5}{2}$]^2 = ۲۴ + $\frac{25}{4}$ = $\frac{121}{4}$ اسواسطے لا^2 + ۵ لا + ۲۸ = $\frac{5}{2}$ ± $\frac{11}{2}$

(۶۷) لا^2 − ۲ لا + ۹ − ۲ √(لا^2 − ۲ لا + ۹) = ۳ اسواسطے (√(لا^2 − ۲ لا + ۹) − ۱)^2 = ۴

(۶۸) ۳ (لا^2 + ۵ لا + ۱) − ۲ √(لا^2 + ۵ لا + ۱) = ۵

لا^2 + ۵ لا + ۱ − $\frac{2}{3}$ √(لا^2 + ۵ لا + ۱) + $\frac{1}{9}$ = $\frac{5}{3}$ + $\frac{1}{9}$ = $\frac{16}{9}$

√(لا^2 + ۵ لا + ۱) − $\frac{1}{3}$ = ± $\frac{4}{3}$

(۶۹) لا^۲ + ۳لا + √(لا^۲ + ۳لا) = ۱۰ اسواسطے [√(لا^۲ + ۳لا) + ۱/۲]^۲ = ۱۰ + ۱/۴

(۷۰) ۲لا^۲ − ۳لا + ۲ − ۲√(۲لا^۲ − ۳لا + ۲) + ۱ = ۰ یعنے (√(۲لا^۲ − ۳لا + ۲) − ۱)^۲ = ۲

(۷۱) ۲لا^۲ + ۶لا + ۵ + ۶√(۲لا^۲ + ۶لا + ۵) = ۵۵ اسواسطے [√(۲لا^۲ + ۶لا + ۵) + ۳]^۲ = ۶۴

(۷۲) ۳لا^۲ − ۲دلا + ۴ − ۶√(۳لا^۲ − ۲دلا + ۴) = د^۲ + ۲د − ۸

اسواسطے [√(۳لا^۲ − ۲دلا + ۴) − ۳]^۲ = (د + ۱)^۲

(۷۳) ۲لا^۲ − ۳لا + ۲ + ۶√(۲لا^۲ − ۳لا + ۲) = ۱۶ اسواسطے [√(۲لا^۲ − ۳لا + ۲) + ۳]^۲ = ۲۵

(۷۴) ۹ = ۵ + ۴(لا + لا^۲) − (لا + لا^۲)^۲ بجای لا + لا^۲ کے ی رکہو تو

ی^۲ − ۴ی + ۴ = ۰ اسواسطے ی = ۲ اور لا^۲ + لا = ۲

(۷۵) (لا + د)(لا + ۲د)(لا + ۳د)(لا + ۴د) = ج^۴ یعنے

(لا^۲ + ۵دلا + ۴د^۲)(لا^۲ + ۵دلا + ۶د^۲) = ج^۴ بجای لا^۲ + ۵دلا کے ی رکہو تو

(ی + ۴د^۲)(ی + ۶د^۲) = ج^۴ اسواسطے ی^۲ + ۱۰د^۲ی + ۲۵د^۴ = ج^۴ + د^۴

(۷۶) ۱۶لا(لا + ۳)(لا + ۱)(لا + ۲) = ۹ یعنی ۱۶(لا^۲ + ۳لا)(لا^۲ + ۳لا + ۲) = ۹

بجای لا^۲ + ۳لا کے ی رکہو تو ۱۶ی(ی + ۲) = ۹

(۷۷) (د^۲ + لا^۲)/(دلا) = (د^۲ + لا^۲)/(د^۲ − لا^۲) (جبر مقابلہ کا صفحہ دیکہو) (د^۲ + لا^۲)(د^۲ − لا^۲ − دلا) = ۰ یعنے د^۲ − لا^۲ − دلا = ۰ اول مساوات سے ناممکن قیمت حاصل ہوتی ہے

لا^۲ + دلا = د^۲ اسواسطے لا^۲ + دلا + د^۲/۴ = ۵د^۲/۴

(۷۸) د = (لا − ۱/۲ + ۱/۲)^۴ + (لا − ۱/۲ − ۱/۲)^۴ بجای لا − ۱/۲ کے ی رکہو تو

(ی + ۱/۲)^۴ + (ی − ۱/۲)^۴ = د اسواسطے ۲ی^۴ + ۳ی^۲ + ۱/۸ = د

اسواسطے ی^۴ + ۳ی^۲/۲ + ۹/۱۶ = ۹/۱۶ − ۱/۱۶ + د/۲ = د/۲ + ۱/۲

(۷۹) لا^۴ − ۲لا^۳ + لا^۲ − لا^۲ + لا = د یعنی (لا^۲ − لا)^۲ − (لا^۲ − لا) = د بجای لا^۲ − لا کے ی رکہو تو

ی^۲ − ی = د

(۸۰) لا۴ − ۲ لا۳ + لا۲ − (لا۲ − لا) = ۱۳۲ اسواسطے [(لا۲ − لا) − ½]۲ = ۱۳۲ + ¼ = ۵۲۹/۴

اسواسطے لا۲ − لا − ½ = ± ۲۳/۲

(۸۱) ۲ لا + ۷ + ۲ √(لا۲ + ۷ لا) + √لا + √(لا + ۷) = ۴۲

اسواسطے [لا + √(لا + ۷)]۲ + √لا + √(لا + ۷) = ۴۲

اسواسطے [لا + √(لا + ۷) + ½]۲ = ۴۲ + ¼ = ۱۶۹/۴ اور لا + √(لا + ۷) + ½ = ± ۱۳/۲

اوپر کی علامت لو تو √(لا + ۷) = ۶ − √لا مجذور کرو اور پھر نیچے کی علامت لو

(۸۲) لا۲ − ۸ لا^(۳/۲) + ۱۶ لا = ۸ لا^(۱/۲) + ۱۲ لا + ۱ = ۰ اسواسطے

(لا − ۴ لا^(۱/۲))۲ + ۲ (لا − ۴ لا^(۱/۲)) + ۱ = ۰ اسواسطے

لا − ۴ لا^(۱/۲) = −۱ .

(۸۳) [لا + √(ا + لا)]۲ + √لا + √(ا + لا) = ب + ا

اسواسطے [√لا + √(ا + لا) + ½]۲ = ب + ا + ¼ = ح۲ کے رکھو

اسواسطے √لا + √(ا + لا) + ½ = ± ح

اسواسطے √(ا + لا) = ± ح − ½ − √لا مجذور

(۸۴) (لا۲ + لا)۲ + ۴ (لا۲ + لا) + ۴ = ۱۶ لا۲ اسواسطے لا۲ + لا + ۲ = ± ۴ لا

(۸۵) (لا۲ + ا۲)۲ = ۲ ا۲ (لا − ا)۲ اسواسطے لا۲ + ا۲ = ± ا √۲ (لا − ا)

اوپر کی علامت سے ناممکن قیمتیں حاصل ہوتی ہیں نیچے کی علامت لو تو لا۲ + ا لا √۲ = − ا۲ + ا۲ √۲

اسواسطے (لا + ا/√۲)۲ = − ا۲ + ا۲ √۲ + ا۲/۲ = ا۲/۲ + ا۲ √۲ − ا۲ اور لا = − ا/√۲ ± ا (۱ + ۲ √۲)/√۲

(۸۶) لا۲ پر تقسیم کیا تو (لا + ح/ا لا)۲ + ا (لا + ح/ا لا) + ب = ۲ح/ا اس سے لا + ح/لا کی قیمت دریافت کرسکتے ہیں فرض کرو کہ لا + ح/ا لا = م کسر دور کرنے سے مساوات درجہ دوم حاصل ہوگی

(۸۷) مجذور کرو تو ۱ + ۱ − ا/لا + ۲ √(۱ − ا/لا) = ۱ + لا/ا اور

۲ √(۱ − ا/لا) = (لا/ا + ا/لا − ۱) مجذور کرنے سے

تو لا^2 + ۱۱ = ۰ اسسے لا کے ناممکن قیمتیں حاصل ہوتی ہیں

(۹۵) ظاہر ہے کہ لا = ۵ ایک مساوات کا حل ہے ضرب دینے سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ
لا^3 − ۶ لا^2 + ۱۱ لا − ۳۰ = ۰ اور ہم کو معلوم ہے کہ ۵^3 − ۶ × ۵^2 + ۱۱ × ۵ − ۳۰ = ۰
تفریق کرنے سے لا^3 − ۵^3 − ۶ (لا^2 − ۵^2) + ۱۱ (لا − ۵) = ۰ لا − ۵ پر تقسیم کرو تو
لا^2 + ۵ لا + ۲۵ − ۶ (لا + ۵) + ۱۱ = ۰ اسسے لا کے ناممکن قیمتیں حاصل ہوتی ہیں

(۹۶) لا (۶ لا^2 − ۵ لا + ۱) = ۰ اسواسطے کیا لا = ۰ یا ۶ لا^2 − ۵ لا + ۱ = ۰

(۹۷) لا^2 (لا + ۱) − ۴ (لا + ۱) = ۰ اسواسطے (لا^2 − ۴) (لا + ۱) = ۰ کیا لا + ۱ = ۰ یا لا^2 − ۴ = ۰

(۹۸) یہہ ظاہر ہے کہ لا = ا ایک حل مساوات ہے لا/ا − ۱ + ب/لا − ب/ا + ب^2/لا^2 − ب^2/ا^2 = ۰
[لا − ا] [۱/ا − ب/ا لا − ب^2 (لا + ا)/ا^2 لا^2] = ۰ تقسیم لا − ا پر کرو تو
۱/ا − ب/ا لا − ب^2 (لا + ا)/ا^2 لا^2 = ۰ اسواسطے
ا لا^2 − ا ب لا − ب^2 لا − ب^2 ا = ۰ اسواسطے
لا^2 − ب (ا + ب)/ا لا + [ب (ا + ب)/۲ا]^2 = ب^2 + [ب (ا + ب)/۲ا]^2 = ب^2 (ب^2 + ۲ ا ب + ۵ ا^2)/۴ ا^2

(۹۹) ۸ لا^3 − ۱ + ۸ (۲ لا − ۱) = ۰ اسواسطے [۲ لا − ۱] [۴ لا^2 + ۲ لا + ۹] = ۰
کیا ۲ لا − ۱ = ۰ یا ۴ لا^2 + ۲ لا + ۹ = ۰ اس آخر مساوات سے ناممکن قیمتیں حاصل ہوتی ہیں

(۱۰۰) لا^2 − ۴/۹ = ۱/لا [لا + ۲/۳] پس (لا + ۲/۳) [لا − ۲/۳ − ۱/لا] = ۰
اسواسطے لا + ۲/۳ = ۰ یعنی لا − ۲/۳ − ۱/لا = ۰ اس آخر مساوات سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ
لا^2 − ۲ لا/۳ = ۱ اسواسطے (لا − ۱/۳)^2 = ۱ + ۱/۹

(۱۰۱) ۳ (لا^3 − ۱) + ۸ لا^2 (لا − ۱) = ۰ اسواسطے (لا − ۱) [۳ (لا^2 + لا + ۱) + ۸ لا^2] = ۰
اسواسطے کیا تو لا − ۱ = ۰ یا ۱۱ لا^2 + ۳ لا + ۳ = ۰

(۱۰۲) ظاہر ہے کہ لا = − م ایک حل ہے
لا^3 − م لا^2 − ۲ (م^2 + ۱) لا − ۲ م = ۰ اور یہہ ہم کو معلوم ہے کہ

پس مساوات $لا^۲ + \frac{ع}{ح} لا + \frac{ا}{ح} = ۰$

(۱۳) قیمتیں $\frac{-ع \pm \sqrt{ع^۲ - ۴ق}}{۲}$ مین اور $ع^۲ - ۴ق = (ک + \frac{ق}{ک})^۲ - ۴ق$

$= ک^۲ + ۲ق + \frac{ق^۲}{ک^۲} - ۴ق = (ک - \frac{ق}{ک})^۲$ یہہ مجذور کامل ہے

(۱۴) فرض کرو لا قیمت مشترک دونو مساواتون $الا^۲ + ب لا + ح = ۰$ اور $اَلا^۲ + بَ لا + حَ = ۰$ کی ہو

تو اول مساوات کو حَ مین اور دوسری مساوات کو ح مین ضرب دو اور تفریق کرو تو

$(احَ - اَح) لا^۲ + (بحَ - بَح) لا = ۰$ اسواسطے $(احَ - اَح) لا = بَح - بحَ \quad \cdots (۱)$

اور پہر اول کو اَ اور دوسری کو ا مین ضرب دو اور تفریق کرو تو

$(اَب - ابَ) لا + اَح - حَ ا = ۰$ اسواسطے $(اَب - ابَ) لا = احَ - اَح \quad \cdots (۲)$

(۱) اور (۲) مین ضرب چلیپائی لگاؤ تو $(احَ - اَح)^۲ = (اَب - ابَ)(بَح - بحَ)$

(۱۵) فرض کرو کہ $\frac{۲لا - ۷}{لا^۲ - ۲لا - ۵} = ی$ تو $لا = \frac{ی + ۱ \pm \sqrt{\{(ی-۱)(۱۱ی-۱)\}}}{ی}$ دفعہ ۲۴۵ کے موافق

ظاہر ہے کہ ۱ اور $\frac{۱}{۱۱}$ کے درمیان ی نہ واقع ہو تو لا کے نفس الامری قیمت ہو سکتی ہے نہیں

(۱۶) $\frac{لا^۲ - ۲لا + ع^۲}{لا^۲ + ۲لا + ع^۲} = ی$ کے فرض کرو تو $لا = \frac{-(ی+۱) \pm \sqrt{(ی+۱)^۲ - ع^۲(ی-۱)^۲}}{ی-۱}$

پس علامت جذر کی نیچے یہہ جملہ واقع ہے $(۱-ع^۲)(ی - \frac{ع-۱}{ع+۱})(ی - \frac{ع+۱}{ع-۱})$ اور

بموجب فرض کے $۱-ع^۲$ منفی ہے اسواسطے دوسرا جز بہی منفی ہونا چاہئے تاکہ لا کے نفس الامری قیمت ہو

اسلئے $\frac{ع-۱}{ع+۱}$ اور $\frac{ع+۱}{ع-۱}$ کے درمیان ی ہونا چاہئے

تیئیسواں باب

(۱) دوسری مساوات کو ۲ مین ضرب دیکر پہلی مساوات کے ساتہہ جمع کرلو

(۲) اول مساوات سے $ی = ۱۰۰ - لا$ اس قیمت کو دوسری مساوات مین رکہہ لو۔

(۳) دوسری مساوات $لا + ی = لا ی$ حاصل ہوتا اسواسطے $۴ = لا ی$ اس مساوات مین ی کی جگہہ ۴ ÷ لا لکہو

(۴) اول مساوات سے $ی = ۷ - لا$ اسکو دوسری مساوات مین رکہو

(۵) اول مساوات سے ی = لا - ۱۲ اسکو دوسرے مساوات مین رکھو

(۶) اول مساوات سے لا + ی = ۸ اور دوسرے مساوات سے ۲لا - ی = ۲ + ۲لا اسمین
ی = ۸ - لا رکھو

(۷) لا^2 + ۲لای + ی^2 = ۶۵ + ۵۶ = ۱۲۱ یعنے (لا + ی)^2 = ۱۲۱ اور
لا^2 - ۲لای + ی^2 = ۶۵ - ۵۶ = ۹ یعنے (لا - ی)^2 = ۹

(۸) دوسرے مساوات سے لا = (۲ + ۵ی)/۳ اسکو اول مساوات مین رکھو

(۹) اول مساوات سے لا + ی = ۲لای اسواسطے ۱ = لای اسمین ی کے جگہہ ۲ - لا رکھو

(۱۰) اول مساوات کو ۲ مین ضرب دو اور دوسرے مساوات کو تفریق کرو

(۱۱) ۲لا + ۳ی = ۳۷ اور ۴۵ (لا + ی) = ۱۴ لای اول مساوات سے
لا = (۳۷ - ۳ی)/۲ اسکو دوسرے مساوات مین مندرج کرو

(۱۲) دونو مساواتون کو جمع کرکے جذر نکال لو یا ی = ن لا کر رکھو تو (۴ن^2 + ن)/(۱ + ۳ن) = ۱۱۵/۵۴ اسے معلوم ہوا کہ ن = ۵/۳ یا - ۲۳/۲۴

(۱۳) ی = ن لا کے رکھو تو (ن - ن^2)/(۱ + ن) = ۲/۱۵ اسے معلوم ہوا کہ ن = ۲/۳ یا ۱/۵

(۱۴) ی = ن لا کے رکھو تو (۴ن^2 + ن + ۱)/(۸ن^2 + ۳) = ۹/۱۴ اسے ن = ۱/۴ یا - ۲

(۱۵) ی = ن لا رکھو تو (ن - ۲ن^2)/(۱ + ن) = ۱/۱۲ اسے ن = ۱/۸ یا ۱/۳

(۱۶) ی = ن لا کے رکھو تو (ن^2 - ن + ۱)/(ن^2 - ۲ن) = - ۲۱/۱۵ اسے ن = ۵/۴ یا ۱/۳

(۱۷) ی = ن لا کے رکھو تو (۱ - ۴ن^2)/(ن + ۲ن^2) = ۹/۳ یعنے ((۱ + ۲ن)(۱ - ۲ن))/(ن(۱ + ۲ن)) = ۳
اسواسطے (۱ - ۲ن)/ن = ۳

(۱۸) دوسرے مساوات سے ی = (۷ - ۵لا)/۲ اسکو اول مساوات مین رکھو

(۱۹) دوسرے مساوات سے ی = ۲ - لا اسکو مساوات اول مین رکھو

(۲۰) (لا + ی)^2 + (لا - ی)^2 = ۱۰/۳ (لا^2 - ی^2) اسواسطے ۶ (لا^2 + ی^2) = ۱۰ (لا^2 - ی^2)
اسواسطے ۴لا^2 = ۱۶ی^2 اسواسطے لا = ± ۲ی

(۳۰) (لا^۳ + ی^۳)/(لا + ی) = ۶۵/۵ یعنی لا^۲ − لا ی + ی^۲ = ۱۳ اسمین ی کے جگہہ ۵ − لا رکہو

(۳۱) (لا^۳ + ی^۳)/(لا + ی) = ۱۰۰۱/۱۱ یعنی لا^۲ − لا ی + ی^۲ = ۹۱ اسمین ی کے جگہہ ۱۱ − لا رکہو

(۳۲) (لا^۳ + ی^۳)/(لا ی (لا + ی)) = ۳۵/۳۰ یعنی (لا^۲ − لا ی + ی^۲)/(لا ی) = ۷/۶ اسمین ی = ن لا کے رکہو تو
(۱ − ن + ن^۲)/ن = ۷/۶ اسواسطے ن = ۳/۲ یا ۲/۳ یا اسکو اسطرح حل کرو کہ اول
مساوات کے سہ چند کو دوسرے مساوات کے ساتہہ جمع کرکے جذر کعب لو تو لا + ی = ۵
اور لا ی = ۶

(۳۳) لا^۳ + ی^۳ = ۱۸ لا ی اور لا + ی = ۱۲ اسواسطے تقسیم کرنے سے لا^۲ − لا ی + ی^۲ = ۳ لا ی/۲
اسمین ی = ن لا کے رکہو تو ۱ − ن + ن^۲ = ۳ن/۲ اسواسطے ن = ۲ یا ۱/۲

(۳۴) (لا^۳ + ی^۳)/(لا + ی) = ۴۹۱۴/۱۸ یعنی لا^۲ − لا ی + ی^۲ = ۲۷۳ اسمین ی کے جگہہ ۱۸ − لا رکہو

(۳۵) ی^۳ + لا^۳ = ۹ لا ی اور لا + ی = ۳/۴ لا ی تقسیم کرنے سے لا^۲ − لا ی + ی^۲ = ۱۲
اور دوسرے مساوات کے مجذور کرنے سے ۹ لا^۲ ی^۲/۱۶ − ۳ لا ی = ۱۲ حاصل ہوتا ہے
اسسے لا ی = ۸ یا − ۸/۳ کے حاصل ہوتا ہے

(۳۶) لا^۲ (لا + ی) = لا^۲ (۲ لا − ۳ ی) اسواسطے لا + ی = ۲ لا − ۳ ی اسواسطے لا = ۴ ی
معلوم مساواتون مین سے کسے ایک مساوات مین اسکو رکہو

(۳۷) لا ی (لا + ی) = ۲۰ اور لا + ی = ۵/۴ لا ی ضرب دو ۵/۴ لا^۲ ی^۲ (لا + ی) = ۲۰ (لا + ی)
اسواسطے لا^۲ ی^۲ = ۱۶ اسواسطے لا ی = ±۴ اسکو اول مساوات مین رکہو

(۳۸) (لا^۳ + ی^۳)/(لا^۲ − لا ی + ی^۲) = (۶ لا ی − ۱)/۷ یعنی لا + ی = (۶ لا ی − ۱)/۷ اسکو مجذور کرو تو
لا^۲ + ی^۲ + ۲ لا ی = (۶ لا ی − ۱)^۲/۹ اسواسطے ۷ + ۳ لا ی = (۶ لا ی − ۱)^۲/۴۹ اور
۱۲ لا^۲ ی^۲ − ۵۳ لا ی − ۱۱۴ = ۰ اس مساوات سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ لا ی = ۶ یا − ۱۹/۱۲
اسکو مساوات لا + ی = (۶ لا ی − ۱)/۷ مین رکہو

(۳۹) لا^۲ + ی^۲ = لا^۲ ی^۲/۲ اسواسطے ۸ = لا^۲ ی^۲/۲ اسواسطے ۱۶ = لا^۲ ی^۲ اسمین ی کے جگہہ ۸ − لا^۲ رکہو

(۴۰) لا+ی=۴ مجذور کرو تو لا^۲+ی^۲=۱۶−۲لای پہر مجذور کرو تو

لا^۴+ی^۴+۲لا^۲ی^۲=۲۵۶−۶۴لای+۴لا^۲ی^۲ اسیواسطے

۸۲+۲لا^۲ی^۲=۲۵۶−۶۴لای+۴لا^۲ی^۲ پس لا^۲ی^۲−۳۲لای=−۸۷

اسواسطے لای=۳ یا ۲۹ اسکو معلوم مساوات مین کام مین لاؤ

(۴۱) (لا^۵−ی^۵)/(لا−ی)=۳۰۹۳/۳ یعنی لا^۴+لا^۳ی+لا^۲ی^۲+لای^۳+ی^۴=۱۰۳۱ یعنے

لا^۴+ی^۴+لای(لا^۲+ی^۲)+لا^۲ی^۲=۱۰۳۱ اب لا−ی=۳ اسواسطے

لا^۲+ی^۲=۹+۲لای اسواسطے لا^۴+ی^۴=(۹+۲لای)^۲−۲لا^۲ی^۲

=۸۱+۳۶لای+۲لا^۲ی^۲ اسکو اوپر کی مساوات مین درج کرو تو

۸۱+۳۶لای+۲لا^۲ی^۲+لای(۹+۲لای)+لا^۲ی^۲=۱۰۳۱ یعنی

۵لا^۲ی^۲+۴۵لای=۹۵۰ اسواسطے لای=۱۰ یعنی −۱۹ اب اسکو دوسرے مساوات مین کام مین لاؤ

(۴۲) ((۳لا−۳ی)/(لا+ی))^۲+((۳لا+۳ی)/(لا−ی))^۲=۸۲ بجای (لا−ی)/(لا+ی) کے ع رکہو تو

۹ع^۲+۹/ع^۲=۸۲ اسواسطے ۹ع^۴−۸۲ع^۲+۹=۰ اسے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے

ع^۲=۹ یا ۱/۹ اسواسطے (لا−ی)/(لا+ی)=±۱/۳ یا ±۳ اول (لا−ی)/(لا+ی)=+۱/۳ کے لو تو

۳(لا−ی)=لا+ی اسواسطے لا=۲ی اسکو دوسرے مساوات معلوم مین رکہو

(۴۳) لا+ی=۴+لای اسواسطے لا^۲+ی^۲=(۴+لای)^۲−۲لای=۱۶+۶لای+لا^۲ی^۲

اسکو اول مساوات مین رکہو تو ۱۶+۶لای=۱۹ اسواسطے لای=۱/۲ اسکو دوسرے مساوات مین کام مین لاؤ

(۴۴) (لا^۴+لا^۲ی^۲+ی^۴)/(لا^۲−لای+ی^۲)=۱۳۳/۷ یعنی لا^۲+لای+ی^۲=۱۹ اس مساوات اور مساوات اول کی جمع اور تفریق کرنے سے لا^۲+ی^۲=۱۳ اور لای=۶ کے حاصل ہوتا ہے

(۴۵) (لا^۴+لا^۲ی^۲+ی^۴)/(لا^۲+لای+ی^۲)=۹۳۱/۴۹ یعنی لا^۲−لای+ی^۲=۱۹ اس مساوات اور اول مساوات سے

لا^۲+ی^۲=۳۴ اور لای=۱۵ حاصل ہوتا ہے

(۴۶) دوسرے مساوات کی دوچند کو اول مساوات کے ساتہہ جمع کرو تو (لا^۲+ی^۲)^۲+(لا^۲+ی^۲)=۱۸۲

اس مساوات درجہ دوم لا۲ + ی۲ = ۱۳ لا ی – ۳۶ سے حاصل ہوتا ہے اسمین اول قیمت کو مساوات دوم مین رکھو تو لا ی = ± ۶ بنکے حاصل ہوگا

(۴۷) اول مساوات سے لا ی (ی + لا – ۳) = ۳ (۴ لا + ی – لا ی) اس مساوات اور دوسرے مساوات کو اپسمین ضرب دو تو لا۲ ی۲ (ی + ۴ لا – لا ی) (ی + لا – ۳) = ۳۶ (لا + ی – ۳) (۴ لا + ی – لا ی)

اسیواسطے (ی + ۴ لا – لا ی) (ی + لا – ۳) = ۰ یا لا۲ ی۲ = ۳۶ اور لا ی = + ۶ کے لو اور اول مساوات معلوم مین رکھو اور پہر ی + لا – ۳ = ۰ لو اسے ی + ۴ لا – لا ی = ۰ حاصل ہوگا اسے لا اور ی کو دریافت کرو

(۴۸) دوسرے مساوات کو اول مساوات پر تقسیم کرو تو لا + ی – √لا ی = ۱۹ اسواسطے جمع اور تفریق کرنے سے لا + ی = ۱۰ اور √لا ی = ۴ حاصل ہوگا اسواسطے لا ی = ۱۹ اور ۱۰ – لا بجائی ی کے لکھو

(۴۹) دوسرے مساوات کو اول مساوات پر تقسیم کرو تو لا + ی + √لا ی = ۱۹ جمع اور تفریق کرنے سے لا + ی = ۱۳ اور √لا ی = ۶ حاصل ہوگا

(۵۰) لا + ی = ۲/۷ اور ۱/لا۲ + ۱/ی۲ = ۶ اول مساوات کو دوسرے مساوات پر تقسیم کرو تو ۲/لا۲ – ۱/لا ی + ۱/ی۲ = ۱۲ اور ۶ – ۱/لا۲ بجائی ۱/ی۲ کے رکہو تو

۲/لا۲ – ۶ ۱/لا ۱۲ + = ۴

اسواسطے (۱/لا – ۳)۲ = ۱

(۵۱) لا۲ – ی۲ = (۸ – لا)۲ نیز ی کے جگہہ لا – ۱ رکہو

(۵۲) لا + ی = ۷ + √لا ی اور √لا ی (لا + ی) = ۷۸ اسلئی √لا ی (۷ + √لا ی) = ۷۸ اس مساوات درجہ دوم سی √لا ی = ۶ یا –۳ کے حاصل ہوگا

(۵۳) لا + ی = ۱۰ اور لا + ی = ۵/۲ √ی لا اسواسطے ۱۰ = ۵/۲ √لا ی اور √لا ی = ۴

(۵۴) اول مساوات کا مجذور کرو لا + ی – ۲ √لا ی = ۴ لا ی اسواسطے ۲۰ – ۲ √لا ی = ۱۴ لا ی

(۳-ی+لا) (لا-ی+۱۱)

اس مساوات درجہ دوم سے $\sqrt{لای} = ۲$ یا $-\frac{۵}{۴}$ کے حاصل ہوتا ہے

(۵۵) $ی = ن لا$ مساوات دوم میں رکھو تو $\frac{ن^۲+۱}{ن} = \frac{۳۴}{۱۵}$ اسواسطے $ن = \frac{۳}{۵}$ یا $\frac{۵}{۳}$

اور مساوات اول سی $\sqrt{لا^۲ - ی^۲} - ۲ی = -۲$ اسمین $لا = \frac{۵ی}{۳}$ رکھو

(۵۶) $۳ + لا^۲ = (۸ - ۲ی)^۲$ اور $۵ی^۲ + ۴لا^۲ = (۹ - ۲لا)^۲$ دوسری مساوات

$۵ی^۲ = ۸۱ - ۳۶لا$ اور $لا^۲ = \frac{۸۱ - ۵ی^۲}{۳۶}$ اسکو مساوات اول میں رکھو

(۵۷) $ای + ب لا = ۴ لا ی$ اسمین ی کے جگہہ $ب - \frac{ب لا}{ا}$ رکھو

(۵۸) $ی = \frac{ب^۲}{لا}$ کو ی کے جگہہ مساوات اول میں رکھو $لا^۲ - \frac{ب^۴}{لا^۲} = ا^۲$ اسواسطے

$لا^۴ - ا^۲ لا^۲ = ب^۴$ اسواسطے $(لا^۲ - \frac{ا^۲}{۲})^۲ = ب^۴ + \frac{ا^۴}{۴}$

(۵۹) $ا^۴ = لا^۴ + ی^۴ + ۴لای(لا^۲ + ی^۲) + ۶لا^۲ی^۲ = ب^۴ + ۴لای(ب^۲ - ۲لای) + ۶لا^۲ی^۲$

پس $۲لا^۲ی^۲ - ۴ب^۲لای = ب^۴ - ا^۴$ پس اس مساوات درجہ دوم سے لا ی کے قیمت دریافت کرو جبر مقابلہ کا دفعہ ۱۹۹

(۶۰) $لا^۴ + ی^۴ + ۲لا^۲ی^۲ = ۱۶لا^۲ی^۲$ اسواسطے $لا^۲ + ی^۲ = ۴ لا ی$ اسمین ی کے

جگہہ $ا - لا$ رکھو

(۶۱) کسور اول مساوات سی دور کرو تو $لا ی = اب$ حاصل ہوگا اسمین ی کے جگہہ $ا + ب - لا$ رکھو

تو $اب = (ا + ب - لا) لا$ اسواسطے $لا^۲ - (ا + ب) لا = - اب$

(۶۲) اول مساوات سے کسور دور کرو اور ی کی جگہہ $۲ب - \frac{ب لا}{ا}$ رکھو تو یہہ حاصل ہوگا

$(ا + ب) لا^۲ - ۴اب لا + ا^۲ (۳ب - ا) = ۰$

(۶۳) دوسرے مساوات پر اول مساوات کو تقسیم کرو تو $لا^۴ + ی^۴ + لای(لا^۲ + ی^۲) + لا^۲ی^۲ = \frac{ش}{ا}$

اور $لا^۲ + ی^۲ = ا^۲ - ۲لای$ اور $لا^۴ + ی^۴ = ا^۴ - ۴ا^۲ لای + ۲لا^۲ی^۲$

پس $۵لا^۲ی^۲ - ۵ا^۲لای + ا^۴ = \frac{ش}{ا}$ اس مساوات سے لای کو دریافت کرو

(۶۴) $لا^۲ + \sqrt{لا^۴ - ی^۴} = ۲ی^۲$ اسواسطے $لا \pm ا = ۲ی^۲$ اسواسطے

$لا^۲ = $ [illegible] اسکو مساوات دوم میں رکھو

(۶۵) دوسرے مساوات سے ی[۲(ا+ب)−لا] = −لا(۲اب−ی)
اور اول مساوات سے ی(۲اب−ی) = لا[۲(ا+ب)−لا] اب ان دونون کو آپس مین ضرب دیو
تو ی۲(۲اب−ی)[۲(ا+ب)−لا] = −لا۲(۲اب−ی)[۲(ا+ب)−لا] اب
اسواسطے ضرور ہے کہ کیا تو [۲اب−ی][۲(ا+ب)−لا] = ۰ یا ی۲ = −لا۲ اب اول
۲اب−ا = ۰ کے لو تو دوسرے مساوات سے ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ ۲(ا+ب)−لا =
(۶۶) ۴(لا۲−ی۲) = (۱−لای)۲ اور لا۲−ی۲ = ا ی لا اسواسطے
۴ا لا ی = (۱−لای)۲ اس مساوات درجہ دوسرے لای دریافت کرو
(۶۷) اول اور دوم مساوات کو آپس مین تقسیم اور ضرب کرلو (لا+ی)/(لا−ی) = ای/ح اور
لا۲ − ی۲ = اح لا اول سے لا = ای(ا+ح)/(ای−ح) اسکو آخر مساوات مین رکھو
تو ۴ا ی ی۲ = ح ای(ا۲ ی۲ − ح۲)
(۶۸) ۲لا + ۲√(لا۲−ی۲) = ا انتقال اور مجذور کرنے سے ۴(لا۲−ی۲) = (ا−۲لا)۲
اسواسطے ۴ی۲ = ۴الا − ا۲ دوسرے مساوات کا مجذور کرو ۲لا۲ + ۲√(لا۴−ی۴) = ب۲
انتقال اور مجذور کرنے سے ۴(لا۴−ی۴) = (ب۲−۲لا۲)۲ اسواسطے
لا۲ی۲ = ۴ب۲لا۲ − ب۴ پس ی۲ کے جگہہ (۴الا−ا۲)/۴ رکھو
(۶۹) مساوات اول مین ی کی جگہہ اب/لا رکھو تو ۲(ب۲/لا۲ + لا۲/ب۲)^½ = ۴ اسواسطے
ب۲/لا۲ + لا۲/ب۲ = ۴ اسواسطے ب۴ − ۴ب۲لا۲ + لا۴ = ۰
(۷۰) دونو مساواتون کو جمع کرو تو لا۲(لا−۱)۲ + ی۲(ی−۱)۲ = ا + ب اور
لا(لا−۱) + ی(ی−۱) = ا اب لا(لا−۱) کے جگہہ ی اور ی(ی−۱) کی جگہہ د رکھو تو
تو ی۲ + د۲ = ا+ب اور ی + د = ا پس ان دونو مساواتون سے ی اور د کو دریافت کرو
اور پھر اونسے لا اور ی کو
(۷۱) دوسرے اور تیسرے مساوات سے ی/ب = ح/ی اسواسطے د = بی/ح اسکو اول مساوات مین رکھو

لا۳ + ء۳ + ی۳ = ۱ اسواسطے (لا + ء + ی)۳ + ۲ (لا۳ + ء۳ + ی۳) − ۳ (لا + ء + ی) (لا۲ + ء۲ + ی۲) = ۰
یعنے ۶ لاءی = ۰

(۷۹) تینوں مساواتوں کو جمع کرو تو (لا + ء + ی)۲ = ا۲ + ب۲ + ج۲ اسواسطے
لا + ء + ی = ± (ا۲ + ب۲ + ج۲)^½

(۸۰) لاء + ءی + ی لا = ۲۶ . . . (۱)

(لا + ء + ی) (لاء + ءی + ی لا) − ۳ لاءی = ۱۶۲ . . (۲)

(لا۲ + ء۲ + ی۲) (لاء + ءی + ی لا) − لاءی (لا + ء + ی) = ۵۳۸ . . (۳)

(۱) مساوات کو (۲) میں مندرج کرو تو ۲۶ (لا + ء + ی) − ۳ لاءی = ۱۶۲ (۴)

اور (۱) اور (۴) کو (۳) میں مندرج کرو تو

۲۶ (لا۲ + ء۲ + ی۲) − [۲۶ (لا + ء + ی) − ۱۶۲] / ۳ (لا + ء + ی) = ۵۳۸

(۱) کو ۵۲ میں ضرب دیکر جمع کرو تو

۲۶ (لا + ء + ی)۲ − ۲۶/۳ (لا + ء + ی)۲ − ۵۴ (لا + ء + ی) = ۱۸۹۰ یعنی
۵۲/۳ (لا + ء + ی)۲ − ۵۴ (لا + ء + ی) = ۱۸۹۰ اس مساوات درجہ دوم کے حل کرنے سے لا + ء + ی کی ایک قیمت ۹ معلوم ہوتی ہے پس لاءی = ۲۴

اب ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ لا + ء + ی = ۹ اور لاء + ءی + ی لا = ۲۶ اور لاءی = ۲۴
اسواسطے لا + ء + ۲۴/لاء = ۹ اور لاء + ۲۴ (لا + ء)/لاء = ۲۶ اسواسطے
لاء + (۹ − ۲۴/لاء) ۲۴/لاء = ۲۶ اسواسطے (لاء)۳ − ۲۶ (لاء)۲ + ۲۱۶ لاء − ۵۷۶ = ۰
امتحان کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ لاء = ۶ یا ۸ یا ۱۲ کے

چوبیسواں باب

(۱) فرض کرو کہ ایک عدد کو لا اور دوسرے کو ء تعبیر کرتا ہے تو

لا + ء = ۳۹ لا۳ + ء۳ = ۱۴۱۹۹

(۲) فرض کرو کہ عدد مطلوب کو (لا+۱) (لا+۲) (لا+۳) تعبیر کرتا ہے تو

(لا+۱) (لا+۲) + لا (لا+۲) + لا (لا+۱) = ۴۷

(۳) فرض کرو کہ طول لا گز ہے تو عرض لا−۱ گز ہوگا تو

لا (لا−۱) = ۳ × ۳۴۰ = ۱۰۲۰

(۴) فرض کرو کہ ٹہری ہوئی پانی مین ملاح لا میل فی گھنٹہ کشتی کہیتے ہین تو دہار پر ۳ ۱/۲ میل $\frac{۳\frac{۱}{۲}}{لا+۲}$ گھنٹہ مین لیجائینگے اور الٹی دہار پر $\frac{۳\frac{۱}{۲}}{لا-۲}$ گھنٹہ مین لاوینگے اسواسطے

$\frac{۳\frac{۱}{۲}}{۲+لا} + \frac{۳\frac{۱}{۲}}{لا-۲} = ۱\frac{۲}{۳}$

(۵) فرض کرو کہ باغ کے دو مقابل سمتون مین سے ہر ایک سمت مین ٹٹیات اور باقی دو مقابل سمتون مین ٹٹیان لگائی جاوین تو ۲لا + ۲ر = ۱۰۷ اور چونکہ ہر ایک ٹٹی دو گز لمبی ہے اسلئے ۴لار مربع گز باغ کا رقبہ ہوگا اسیواسطے

۴لار = ۴۹۴۰ + ۹۰۹۸

(۶) فرض کرو کہ کاشتکار نے لا بیگہہ زمین لی تھی تو وہ $\frac{۸۴}{لا}$ روپیہ فی بیگہہ دیتا ہے اور (لا−۴) بیگہہ اوسنے اور کسانون کی دی اور اونسے $\frac{۸۴}{لا} + \frac{۱}{۲}$ فی بیگہہ اوسنے لیتا ہے اسواسطے

(لا−۴) ($\frac{۸۴}{لا} + \frac{۱}{۲}$) = ۸۴ ۔

(۷) فرض کرو کہ لا بہیڑین خریدین تو $\frac{۴۳\frac{۳}{۴}}{لا}$ ایک بہیڑ کی قیمت ہوتی اور (لا−۲) بہیڑ اوسنے فی بہیڑ ($\frac{۴۳\frac{۳}{۴}}{لا} + \frac{۱}{۱۶}$) بہیڑ کے حساب سے بیچین اسلئے

(لا−۲) ($\frac{۴۳\frac{۳}{۴}}{لا} + \frac{۱}{۱۶}$) = ۴۳ $\frac{۱}{۴}$

(۸) فرض کرو کہ خط کے طول کو ا تعبیر کرتا ہے اور حصہ محدودہ کے طول کو لا تو

$\frac{ا}{۲}$ (لا + $\frac{ا}{۲}$) = لا۲

(۹) فرض کرو کہ لا مقسوم اور ر مقسوم علیہ کو تعبیر کرتا ہے تو لار = ۷۵۰ اور $\frac{لا}{ر}$ = ۳ $\frac{۱}{۳}$

(۱۰) فرض کرو کہ اوس شخص کو لا نیبو ہاتھہ آئی تو نیبون کی بازار کی قیمت $\frac{۱}{لا+۲}$

فی نیبو ہوگی اور اوس شخص نے $\frac{1}{\text{لا}}$ آنہ ہر ایک نیبو کی قیمت دی

اسواسطے $\frac{15}{\text{لا}} - \frac{15}{\text{لا}+2} = \frac{1}{12}$

(۱۱) فرض کرو کہ فی درجن انڈوں کی قیمت لا ہے تو ایک شلنگ کی $\frac{12}{\text{لا}}$ درجن انڈے آتے ہیں یعنی $\frac{144}{\text{لا}}$ انڈے اور اگر فی درجن ایک پنی قیمت کم ہوتی تو $\frac{144}{\text{لا}-1}$ انڈے ایک شلنگ کے آتے اسواسطے

$$\frac{144}{\text{لا}-1} - \frac{144}{\text{لا}} = 2$$

(۱۲) فرض کرو کہ چوک میں ایک آنہ کی لا نیبو آتی ہیں تو منڈی میں (لا+۶) نیبو ایک آنہ کے آوینگے اور چوک میں پندرہ نیبو کی قیمت $\frac{15}{\text{لا}}$ اور منڈی میں $\frac{15}{\text{لا}+6}$ ہوگی اسواسطے

$$\frac{15}{\text{لا}} - \frac{15}{\text{لا}+6} = \frac{1}{12}$$

(۱۳) فرض کرو کہ بڑی عدد کو لا اور چھوٹی عدد کو ی تعبیر کرتا ہے تو

$$\text{لا} + \text{ی} = 9(\text{لا} - \text{ی}) \quad \text{اور} \quad \text{لا}\,\text{ی} = \frac{12\,\text{لا}}{\text{ی}} + \text{لا}$$

(۱۴) فرض کرو کہ اول مزدور نے لا دنوں کام کیا تو دوسرے نے (لا−۶) دن کام کیا تو اول نے $\frac{96}{\text{لا}}$ آنے فی یوم پائی اور $\frac{54}{\text{لا}-6}$ آنے ہر ایک دن دوسرے نے پائی اسواسطے

$$(\text{لا}-6)\frac{96}{\text{لا}} = \text{لا} \times \frac{54}{\text{لا}-6}$$

(۱۵) فرضکرو کہ جلسہ میں آدمیوں کی تعداد لا ہے اور جو انمیں ہر ایک نے صرف کئی اوسکی تعداد ی ہے تو

$$(\text{لا}+5)(\text{ی}+1) = 120 \quad \text{اور} \quad (\text{لا}-3)\left(\text{ی} - \frac{2}{3}\right) = 52$$

(۱۶) فرض کرو کہ حصوں کی تعداد جو خریدی گئی لا تھی اور ی بٹا فیصدی تھا تو اوسنے $\frac{20(100-\text{ی})}{100}$ فی حصہ خریدا $\frac{20(100+\text{ی})}{100}$ فی حصہ اوسنے بیچا اسواسطے

$$\frac{20(100-\text{ی})\text{لا}}{100} = 1500 \quad \text{اور} \quad \frac{20(100+\text{ی})(\text{لا}-60)}{100} = 1000$$

(۱۷) فرض کرو کہ عدد مطلوب کو لا تعبیر کرتا ہے $\text{لا}^2 + \text{لا} = 9(\text{لا}+1)$ تقسیم لا+۱ پر کرو

(۱۸) فرضکرو کہ وہ لا روپیہ ی روپیہ سودی فیصدی پر دیتا ہے تو ۱۳۰۰ − لا روپیہ کو ی شرح سود فیصدی پر دیتا ہے تو

لا ی / ۱۰۰ = (۱۲۰۰ − لا)(ی − ۵) / ۱۰۰ = ۳۶ اور (۱۲۰۰ − لا) ء / ۱۰۰ = ۴۹

دوسرے تیسرے مساوات سے جو لا اور ی کے قیمتیں معلوم ہون اونکو اول مساوات مین رکہو

(۱۹) فرض کرو کہ جو باقی سفر اوسنے گہوڑی کی ڈاک مین طی کیا وہ لا میل ہے اور گہوڑے کی ڈاک ء میل فی گہنٹہ اور ریل گاڑی ی میل گہنٹہ جاتی ہے تو (۵۶ + لا) / ی = لا / ء اور

۵۶/ی + لا/ء = (۵۶ + ۳۵ + لا) / ی اول مساوات سے لا = ۲۰ ی / ء − ۵۶

اور دوسرے مساوات سے لا = ۳۵ ء / (ی − ء) اسواسطے ۲۰ ی / ء − ۵۶ = ۳۵ ء / (ی − ء)

اب ی/ء کے جگہہ د رکہو تو ۲۰ د − ۵۶ = ۳۵ / (د − ۱) اسواسطے

۲۰ د² − ۷۶ د + ۲۱ = ۰ جو قیمت سوال سے تعلق رکہتی ہے وہ ۷/۲ ہے پس لا = ۱۴

(۲۰) فرض کرو کہ دہلی اور آگرہ کے درمیان ح میل کا فاصلہ ہے اور موہن لا میل فی گہنٹہ اور سوہن ء میل فی گہنٹہ چلتا ہے − اور ی میل پر دونو ملے ہین تو چونکہ دونو برابر وقت چلے ہین اسلئے

ی / لا = (ح − ی) / ء اسواسطے ی = ح لا / (لا + ء) اب جب وہ دونو ملے ہین تو موہن کو ح لا / (لا + ء) میل اور سوہن کو ح − ح لا / (لا + ء) میل یعنے ح ء / (لا + ء) میل طی کرنے ہین

اسواسطے ح ء / (لا (لا + ء)) = ۱۶ ... (۱)　ح لا / (ء (لا + ء)) = ۳۶ ... (۲)

(۲) کو (۱) پر تقسیم کرو تو لا² / ء² = ۳۶ / ۱۶ اسواسطے لا / ء = ۳/۲ اور (۱) سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

ح / لا = ۱۶ (۱ + لا/ء) = ۱۶ × ۵/۲ = ۴۰ اور ح / لا وہ وقت ہے جسمین موہن نے سفر پورا کیا

(۲۱) فرض کرو کہ ع اور ق کے درمیان لا میل کا فاصلہ ہے تو لا/۱۴ میل فی گہنٹہ پہلا قاصد چلتا ہے اور دوسرا قاصد (لا + ۱۰) / ۱۴ فی گہنٹہ چلتا ہے اسواسطے ۱۴ × ۲۰ / لا − ۱۴ × ۲۰ / (لا + ۱۰) = ۱/۲

(۲۲) فرض کرو کہ فاصلہ مین میلوں کی تعداد لا ہے اور مسافر ا ء میل فی یوم اور مسافر ب ی میل فی یوم چلتا ہے تو بیسوین مثال کی طرح ہم اس مثال مین بہی دریافت کر سکتے ہین کہ ا اور ب دونو لا ء / (ء + ی) میل پر ع سے اور لا ی / (ء + ی) میل پر ق سے ملے اسواسطے

پس - ۳لا + ۳۰ = ۰ یعنی اگر لا = ۱۰ کے ہو تو مجذور کامل ہوگا

(۱۰) اگر لا⁴ + ا لا³ + ب لا² + ح لا + د مجذور کامل ہو تو جذر کی صورت لا² + ع لا + ق کی ہوگی اسمین ع اور ق کے اندر لا نہین ہوگا پس یہہ مطابقہ حاصل ہوگا کہ

لا⁴ + ا لا³ + ب لا² + ح لا + د = لا⁴ + ۲ع لا³ + (ع² + ۲ق) لا² + ۲ع ق لا + ق²

پس ا = ۲ع اور ب = (ع² + ۲ق) اور ح = ۲ع ق اور د = ق²

اسواسطے ا(۴ب - ا²) = ۲ع × ۸ق = ۱۶ع ق = ۸ح اور (۴ب - ا²)² = (۸ق)² = ۶۴ق² = ۶۴د

(۱۱) (۱ + لا لا' + ی ی')² = (۱ + لا² + ی²) (۱ + لا'² + ی'²) عمل کرنے سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

لا² + ی² + لا'² + ی'² + لا² ی'² + لا'² ی² - ۲ لا لا' - ۲ ی ی' - ۲ لا لا' ی ی' = ۰

یعنے (لا - لا')² + (ی - ی')² + (لا ی' - لا' ی)² = ۰

اسواسطے ہر یک مجذور برابر صفر کے ہونا چاہیے اسیواسطے لا = لا' اور ی = ی'

(۱۳) فرض کرو کہ کٹوری کی اصلی قیمت لا ہے تو نقصان لا - ۳۰ ۳/۴ ہوا اسواسطے

لا - ۳۰ ۳/۴ = ۹ لا/۱۰

(۱۴) فرض کرو کہ لا اور ی اور ہی حصے ہین جو بالترتیب مقدار مین چھوٹے ہوجاتی ہین تو

لا + ی + ہی = ۱۹ اور ی - ہی = √لا اور لا - ی = ہی² دوسرے مساوات سے

لا = ی² + ہی² - ۲ی ہی اسکو تیسرے مساوات مین درج کرو اور ی پر تقسیم کرو تو ی = ۲ہی + ۱

اور تیسرے مساوات لا = (ہی + ۱)² ان قیمتون کو مساوات اول مین رکھو تو

ہی² + ۵ہی = ۱۴

(۱۵) (-۱ + √-۳)/۲ کے ع اور (-۱ - √-۳)/۲ کے بجائے ق رکھو اور اول فرض کرو کہ

۳ کا اضعاف ن ہی اور ن = ۳م تو بموجب دفعہ ۳۶۰ ع³ = ۱ اسیواسطے

ع³م = ۱ اور ق³ = ۱ اسواسطے ق³م = ۱ پس مجموعہ = ۲ دوم فرضکرو کہ

ن ایسا ہی جب اوسکو ۳ پر تقسیم کرتے ہین تو ایک باقی رہتا ہے اور اوسکی صورت ۳م + ۱ ہے

(۱۰) $\frac{ا-ا}{ا-ا} = \frac{ب-ب}{ب-ب} = \frac{ب(ا-ا)-ا(ب-ب)}{ب(ا-ا)-ا(ب-ب)} = \frac{ب ا-ب ا}{ب ا-ب ا}$

اسیطرح سے اور صورتین بہی قائم ہوسکتی ہین

(۱۱) اول دو مساواتون سے $\frac{لا}{۳} = \frac{ر}{۴} = \frac{ی}{۵}$ = ک کے مقرر کرو تو لا = ۳ک

اور ر = ۴ک اور ی = ۵ک اسکو اخر مساوات مین رکہو تو ک = ۱۸ اور ک = ۲

(۱۲) اول مساواتون سے $\frac{لا}{ا(ب-ح)} = \frac{ر}{ب(ح-ا)} = \frac{ی}{ح(ا-ب)}$ = ک کے مقرر

اسکو اخر مساوات مین رکہو تو ک = ± ا یا

ستائیسوان باب

(۴) فرضکرو کہ ایام مطلوب کی تعداد ی ہے اور

فرضکرو کہ د تعداد اون دنون کی جنمین لا آدمی اٹہہ گہنٹے روز کتابت کرکے اوس کتاب کو لکہ لیوین

د : ۳۲ :: ۲ : لا اور ی : د :: ۸ : ر اسواسطے د = $\frac{۳۲ \times ۲}{ی}$ اور

ی = $\frac{۸ د}{ر} = \frac{۳۲ \times ۸ \times ۲}{لا ر}$

(۵) $\frac{لا}{ر} = \frac{(لا+ی)^2}{(ر+ی)^2} = \frac{لا^2+۲لای+ی^2}{ر^2+۲ری+ی^2}$ بموجب دفعہ ۳۹۴ کے $\frac{لا-ر}{ر} = \frac{لا^2-ر^2+۲(لا-ر)ی}{ر^2+۲ری+ی^2}$

لا - ر پر تقسیم کرو تو $\frac{۱}{ر} = \frac{لا+ر+۲ی}{ر^2+۲ری+ی^2}$ کسر دور کی تو ی^2 = لا ر

(۶) فرضکرو کہ $\frac{ا}{ب}$ = ر اور $\frac{ع}{ق}$ = ر تو ا = ر ب اور ع = ر ق

$(ا^2+ب^2) \div \frac{ا^3}{ا+ب} = ب^2(ر^2+۱) : \frac{ر^3 ب^3}{ب(۱+ر)} = \frac{(۱+ر)(۱+ر^2)}{ر^3}$

$(ع^2+ق^2) \div \frac{ع^3}{ع+ق} = ق^2(۱+ر^2) \div \frac{ق^3 ر^3}{ق(۱+ر)} = \frac{(۱+ر)(۱+ر^2)}{ر^3}$

پس اسسے نتیجہ مطلوب ثابت ہوگیا

(۷) فرضکرو کہ ا : ب :: ح : د اور ب = ح د تو ا د = ب ح اسواسطے $\frac{ا ح^2}{ح}$ = ب ح

اسلئے ا ب = ح^2

(۸) $(ا+د)^2-(ب+ح)^2 = (ا-د)^2-(ب-ح)^2$ اسواسطے ۲ ا د - ۲ ب ح = - ۲ ا د + ۲ ب ح

اسواسطے ا د = ب ح

(۱۰) فرض کرو کہ پہلے قرابہ میں کل لا حصے شراب ہے تو ۱ − لا پانی ہوگا اور
اور دوسرے قرابہ میں کل کی ی حصے شراب ہے تو ۱ − ی پانی ہوگا
جب ان دونوں میں برابر برابر تو ملیں بھر کر نکالتی ہیں تو انمیں شراب اور آب برابر ہوتا ہے اسلیے
لا + ی = ۱ − لا + ۱ − ی اور جب ہم چار تولیں اول سے نکالتی اور ایک تول دوسرے سے
۴ لا + ی شراب اور ۴ (۱ − لا) + ۱ − ی پانی نکلتا ہے تو

۴ لا + ی : ۴ (۱ − لا) + ۱ − ی : : ۲ : ۳

(۱۱) فرضکرو کہ سوہن پاس لا روپیہ اور سوہن پاس ی روپیہ تھا اور موہن م لا روپیہ
دانوں پر لگایا تو سوہن نے م ی روپیہ لگایا ہوگا پس

لا + ی = ۱۶۸ اور لا + م ی = ۲ (ی − م ی) اور ی + م لا = ۳ (لا − م لا)

اسواسطے لا = (۲ − ۳ م) ی اور ی = (۳ − ۴ م) لا اسواسطے باہم ضرب دینے سے
ی = (۲ − ۳ م) (۳ − ۴ م) اس مساوات کی ایک قیمت ۵/۱۲ سوال سے متعلق ہے

(۱۲) فرضکرو کہ مردانہ مجرموں کی تعداد لا اور زنانہ مجرموں کی تعداد ی ہے تو
لا (۱ − ۴/۱۰۰) اور ی (۱ + ۹/۱۰۰) یعنے تعداد مردانہ اور زنانہ مجرموں کی ہوگی اسواسطے
لا (۱ − ۴/۱۰۰) + ی (۱ + ۹/۱۰۰) = (لا + ی) (۱ + ۱/۱۰۰) اسسے معلوم ہوتا ہے کہ
ی = ۴ لا/۵

اٹھائیسواں باب

(۱) ی = م لا رکھو تو ۳ = م × ۱ اسواسطے م = ۳ پس ی = ۳ لا اور ی = ۹ جب لا = ۳
(۲) ا = م ب رکھو تو ۱۵ = م × ۳ اسواسطے م = ۵ پس ا = ۵ ب
(۳) ی = م لا ی رکھو تو ۱ = م × ۱ اسواسطے م = ۱ پس ی = لا ی اور ی = ۴ جب
لا = ۲ اور ی = ۲

(۴) ی = م (ع لا + ی) کے رکھو تو ۳ = م (ع + ۲) اور ۵ = م (۲ ع + ۳) اسواسطے
۵/۳ = (۲ ع + ۳)/(ع + ۲) اسواسطے ع = ۱

(۵) جب $\frac{۱}{ی}$ مستقل ہو تو لا ایسا متغیر ہوتا ہے جیسا کہ ء اور ء متغیر ہو تو لا ایسا بدلتا ہی جیسا کہ $\frac{۱}{ی}$ پس ء اور $\frac{۱}{ی}$ دونو متغیر ہونگے تو بموجب دفعہ ۴۲۵ کے لا ایسا بدلے گا جیسا کہ انکا حاصل ضرب

(۶) لا = م $\frac{ء}{ی}$ رکھو تو ۳ = ۲ م اسواسطے م = $\frac{۳}{۲}$ تو لا = $\frac{۳ء}{۲ی}$ اور لا = $\frac{۳۶}{۸}$ جب ء = ۱۲ اور ی = ۴

(۷) ہفتون کی تعداد اور مزدوری مین تغیر بالاستقامت اور ہفتون کی تعداد اور آدمیون مین تغیر بالعکس ہے، فرض کرو کہ ہفتون کی تعداد کو لا اور روپیون کی تعداد کو ء اور آدمیون کی تعداد کو ی تعبیر کرتا ہی تو لا = م $\frac{ء}{ی}$ یعنی ۶ = م $\frac{۱۴ \times ۱۶}{۵}$ = $\frac{۲۸۵}{۸۰}$ م = $\frac{۵۶}{۱۶}$ م پس م = $\frac{۳}{۱۹}$ پس لا = $\frac{۴۸ ء}{۱۹ ی}$ اب ء کے جگہہ ۲۳ $\frac{۳}{۴}$ اور ی کی جگہہ ۴ رکھو تو لا = $\frac{\frac{۹۵}{۴} \times ۳۲}{۴ \times ۱۹}$ = ۱۰

(۸) لا^۲ = م ء^۳ اور ۹ = ۲۷ م اور م = $\frac{۹}{۲۷}$ پس لا^۲ = $\frac{۹}{۲۷}$ ء^۳

(۹) ایک مقدار کو ا لا سے اور دوسرے کو $\frac{ب}{لا}$ سے تعبیر کرو تو ء ایسا بدلتا ہی جیسا کہ ا لا + $\frac{ب}{لا}$ ء = م (ا لا + $\frac{ب}{لا}$) رکھو تو ۴ = م (ا + ب) اور ۵ = م (۲ ا + $\frac{ب}{۲}$) اسواسطے م ا = ۲ اور م ب = ۲ پس ء = ۲ لا + $\frac{۲}{لا}$

(۱۰) فرض کرو کہ پہلی مقدار کو لا اور دوسرے مقدار کو ء تعبیر کرتا ہی تو لا = م ء کے رکھو تو $\frac{۳}{۴}$ = $\frac{۱۹}{۱۲}$ م اسلئی م = $\frac{۹}{۱۹}$ پس لا = $\frac{۹}{۱۹}$ ء اور ء = ۱۹ جب لا = ۹

(۱۱) فرض کرو ایک مقدار ی ایسے بدلتی ہی جیسا کہ لا + ء جب لا - ء مستقل و معین ہو اور پھر وہ ایسی بدلتی ہی جیسے کہ لا - ء جب لا + ء معین اور مستقل ہو لا + ء کو ص اور لا - ء کو صہ تعبیر کرو تو ی ایسا بدلتا ہی جیسا کہ ص جب صہ مستقل و معین ہو اور ی ایسا بدلتا ہی جیسا کہ صہ جب ص معین اور مستقل ہو تو جب صہ اور ص جدا جدا متغیر ہونگی تو بموجب دفعہ ۴۲۵ کے ی ایسا بدلیگا جیسا کہ اونکا حاصل ضرب ص صہ یعنی لا^۲ - ء^۲

(۱۲) فرض کرو کہ کرہ کا نصف قطر لا اور حجم ء ہے اور چونکہ کرہ کا حجم ایسا بدلتا ہی جیسا اوسکے نصف قطر کا

مکعب تو لا = م ی^۳ کے رکہو اور اون کرون کے حجمون کا مجموعہ جنکی نصف قطر ۳ و ۴ و ۵ ہین
م (۳^۳ + ۴^۳ + ۵^۳) یعنی ۲۱۶ م یا ۶^۳ م ہی یعنی اوس کرہ کی حجم کے برابر جسکا نصف قطر ۶ ہی

(۱۳) فرضکرو کہ دایرہ کا نصف قطر لا اور رقبہ ی ہی تو ی ایسا بدلتا ہے جیسا کہ لا^۲ پس
ی = م لا^۲ کے رکہو تو مجموعہ اون دایرون کے رقبہ کا جنکا نصف قطر ۶ اور ۸ ہے
م (۶^۲ + ۸^۲) یعنی م (۳۶ + ۶۴) یعنی م ۱۰^۲ یعنی اوس دایرہ کا رقبہ جسکا نصف قطر ۱۰ ہے

(۱۴) چونکہ کرہ کا حجم ایسا بدلتا ہی جیسا کہ اوسکی نصف قطر کا مکعب اسلیئے جن کرون کے نصف قطر لن اور لق ہیں
م (لن^۳ − لق^۳) سے تعبیر ہونگے اور فرضکرو کہ جو کرہ گلا کر بنایا ہی اوسکا نصف قطر لص ہو تو
م لص^۳ = م (لن^۳ + لق^۳)

(۱۵) اصل کتاب کے جوابون مین حل دیکھو

(۱۶) ن وین میل کی چال اور (ن − ۱) وین میل کے چال مین تغیر بالعکس ہے
اسواسطے جو وقت کہ ن وین میل کے اور (ن − ۱) وین میل کے طی کرنے مین صرف ہوگا
اونمین تغیر بالاستقامت ہی انین وقت کے گہنٹون کو م (ن − ۱) سے تعبیر کرو چونکہ دوسرا میل ۲ گہنٹہ مین
طے ہوا ہے اسلیئے ۲ = م (۲ − ۱) اسواسطے م = ۲

(۱۷) اول مقدار کو ع سے تعبیر کرو تو دوسری مقدار ق لا سے تعبیر ہوگی اور تیسری ر لا^۲ پس ی ایسا بدلتا ہی جیسا کہ
ع + ق لا + ر لا^۲ پس ی = م (ع + ق لا + ر لا^۲) تو ۰ = م (ع + ق ا + ر ا^۲)
اور ا = م (ع + ۲ ق ا + ۴ ر ا^۲) اور ۴ ا = م (ع + ۳ ق ا + ۹ ر ا^۲) اسواسطے
م ع = ا اور م ق = −۲ اور م ر = ۱/ا پس ی = ا (۱ − ۲ لا/ا + لا^۲/ا^۲) = ا (لا/ا − ۱)^۲

(۱۸) فرض کرو کہ اوس کام کی مقدار کو جو ی گہنٹے مین ن آدمیون نے کیا ہو لا تعبیر کرتا ہی تو لا ایسا بدلتا ہی جیسا کہ
ی ۱/ن جب اکیلا ی بدلتا ہی اور ی ایسا بدلتا ہی جیسا کہ ن ۱/ی جب اکیلا ن بدلتا ہی تو جب دونو لا اور ی بدلینگے تو
لا ایسا بدلے گا جیسا کہ ی ۱/ن ۱/ی پس لا = م ی ۱/ن ۱/ی رکہو اب ی = ۴ اور ی = ۲۵ اور لا = ۱ تو
م = ۱/(۵ (۲۴)^۱/۳) پس لا = (ی/۲۴)^۱/۳ . ن/۵ اب ی = ۱۳ اور لا = ۱/۵ کے رکہو اور ی کو دریافت کرو تو

$\frac{1}{r}$ = $\frac{1}{8}$ = ۲ اسواسطے ر = ۴

اونتیسواں باب

(۱)
۷ | ۱۲۳۴۵۶
۷ | ۱۷۶۳۶　۴
۷ | ۲۵۱۹　۳
۷ | ۳۵۹　۶
۷ | ۵۱　۲
۷ | ۷　۲
۱　۰

(۲)
۵ | ۱۳۵۷۵۳۱
۵ | ۲۷۱۵۰۶　۱
۵ | ۵۴۳۰۱　۱
۵ | ۱۰۸۶۰　۱
۵ | ۲۱۷۲　۰
۵ | ۴۳۴　۲
۵ | ۸۶　۴
۵ | ۱۷　۰
۳　۲

(۳)
۷ | ۳۵۷۲۳۴
۷ | ۵۱۰۳۳　۲
۷ | ۷۲۹۰　۳
۷ | ۱۰۴۱　۳
۷ | ۱۴۸　۵
۷ | ۲۱　۱
۳　۰

(۴)
گیارہ | ۳۳۳۳۱۰
گیارہ | ۳۰۳۰۰　د
گیارہ | ۲۷۵۴　۶
گیارہ | ۲۵۰　۴
گیارہ | ۲۲　۸
۲　۰

(۵)
دس | ۵۴۵
دس | ۳۲　۹
۲　۰

(۶)
دس | ۴۴۴۴
دس | ۲۲۲　۴
دس | ۱۱　۲
۶

(۷)
سات | ۳۴۱۳
سات | ۳۱۰　۳
سات | ۲۲　۲
۲　۲

(۸)
بارہ | ۳۰۲۳۴
بارہ | ۱۳۲۴　۱
بارہ | ۳۲　و
۱　۵

(۹)
گیارہ | ۴۴۵۴
گیارہ | ۴۱۵۱　د
گیارہ | ۲۴۶　۵
۱ | ۱۱۵　۰
۱　۱

(۱۰)
دس | ۵۹۵۱
دس | ۴۹۵　۱
دس | ۱۹۴　۴
دس | ۲۰　۴
۲ ـ ۲

(۱۱) ۹ | ۱۵　　۶ = ۸ × $\frac{۷۵}{۱۰۰}$

(۱۲)
۸ | ۳۱۴۷۶
۸ | ۳۹۳۴　۶
۸ | ۴۹۱　۴
۸ | ۶۱　۳
۷　۵

۱ = ۸ × $\frac{۱۲۵}{۱۰۰۰}$

(۲۸) فرضکرو کہ لا اساس ہے ۱۳۳۱ = لا^۳ اسواسطے لا = ۱۱

(۲۹) فرضکرو کہ لا اساس ہے ۱۴۰۰۰ = لا^۴ + ۳لا^۳

اسواسطے ۱۴۰۰۲ ۱/۴ = (لا^۲ + ۳/۲ لا)^۲ یعنے ۶۴۰۰۹/۴ = (لا^۲ + ۳لا/۲)^۲

اسواسطے ۲۵۳/۲ = لا^۲ + ۳لا/۲

(۳۰) فرض کرو کہ لا اساس ہے تو ۳۵ ۵/۶ = ۵لا + ۵ + ۵/لا

(۳۱) فرض کرو کہ لا اساس ہے تو ۱۴۶۴/۱۰۰۰۰ = ۴/لا + ۴/لا^۲

(۳۲) اساس جبکہ سے بڑا فرض کیا گیا تو تقسیم کرتے ہیں یہہ دریافت ہوگا کہ ہم کو اس بات خیال کرنے کی ضرورت ہی نہیں پڑتی کہ اساس کیا ہے اور خارج قسمت ۱۰۰۲۰۰۱ الکل آتا ہے

(۳۳) جذر ۱۲ دریافت ہوتا ہے اور ہمیں کچھہ اساس پر خیال کرنے کی ضرورت ہی نہیں پڑتی

(۳۴) جذر الکعب ۱۱ ہے اور ہمیں کچھہ اساس پر خیال کرنے کی ضرورت ہی نہیں پڑتی

(۳۵)

۲	۱۷۱۹	
۲	۸۵۹	۱
۲	۴۲۹	۱
۲	۲۱۴	۱
۲	۱۰۷	۰
۲	۵۳	۱
۲	۲۶	۱
۲	۱۳	۰
۲	۶	۱
۲	۳	۰
	۱	۱

(۳۶) ۱۰۲۷ = ۳ × ۳۴۲ + ۱ اور ۳۴۲ = ۳ × ۱۱۴ اور ۱۱۴ = ۳ × ۳۸

اور ۳۸ = ۳ × ۱۳ − ۱ اور ۱۳ = ۳ × ۴ + ۱ اور ۴ = ۳ + ۱

پس ترتیب کو معکس کیا تو ۴ = ۳ + ۱ اور ۱۳ = ۳^۲ + ۳ + ۱ اور ۳۸ = ۳^۳ + ۳^۲ + ۳ − ۱

۱۱۴ = ۳^۴ + ۳^۳ + ۳^۲ − ۳ اور ۳۴۲ = ۳^۵ + ۳^۴ + ۳^۳ − ۳^۲ اور

۱۰۲۷ = ۳^۶ + ۳^۵ + ۳^۴ − ۳^۳ + ۱

(۳۷) ۷۱۶ = ۳×۲۳۹ − ۱ اور ۲۳۹ = ۳×۸۰ − ۱ اور ۸۰ = ۳×۲۷ − ۱ .

اب ترتیب کو معکوس کیا تو ۸۰ = $۳^۴$ − ۱ اور ۲۳۹ = $۳^۵$ − ۳ − ۱ اور ۷۱۶ = $۳^۶$ − $۳^۲$ − ۳ − ۱

(۳۸) ۴۷۵ = ۳×۱۵۸ + ۱ اور ۱۵۸ = ۳×۵۳ − ۱ اور ۵۳ = ۳×۱۸ − ۱

اور ۱۸ = ۳×۶ اور ۶ = ۳×۲ اور ۲ = ۳ − ۱ ترتیب معکوس کرنے سے

۲ = ۳ − ۱ اور ۶ = $۳^۲$ − ۳ اور ۱۸ = $۳^۳$ − $۳^۲$ اور ۵۳ = $۳^۴$ − $۳^۳$ − ۱

اور ۱۵۸ = $۳^۵$ − $۳^۴$ − ۳ − ۱ اور ۴۷۵ = $۳^۶$ − $۳^۵$ − $۳^۲$ − ۳ + ۱

(۳۹) ۲۳۵ مکعب انچ = $\frac{۲۳۵}{۱۷۲۸}$ مکعب فٹ اور $\frac{۲۳۵}{۱۷۲۸}$ = $\frac{۱}{۱۲}$ + $\frac{۷}{۱۴۴}$ + $\frac{۷}{۱۷۲۸}$

پس مجسم متوازی السطوح کا حجم ۱۷۷ء۰۷ مکعب فیٹ اور قاعدہ رقبہ قسطاس اثناعشری میں ۲۰ء۰۵ مربع فیٹ پس موافق قواعد علم مساحت کے مجسم کا ارتفاع

۱۷۷ء۰۷ کو ۲۰ء۰۵ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوگا

۲۰ء۰۵) ۱۷۷ء۰۷ (۳ء گ
۱۶۰ ۱۳۳
۱۷ ۰۴۷
۱۷ ۰۴۷

(۴۰) ۱۰ $\frac{۱}{۴}$ انچ = $\frac{۱۰\frac{۱}{۴}}{۱۲}$ فٹ اور $\frac{۱۰\frac{۱}{۴}}{۱۲}$ = $\frac{۱۰}{۱۲}$ + $\frac{۳}{۱۴۴}$ پس طول قسطاس اثناعشری میں ۰ء۳ ۱۰ فیٹ ہے اور ۷۹ $\frac{۱}{۴}$ مربع انچ = $\frac{۷۹\frac{۱}{۴}}{۱۴۴}$ مربع فیٹ اور $\frac{۷۹\frac{۱}{۴}}{۱۴۴}$ = $\frac{۶}{۱۲}$ + $\frac{۷}{۱۴۴}$ + $\frac{۳}{۱۷۲۸}$ پس رقبہ قسطاس اثناعشری میں ۶۷۳ء۰ مربع فیٹ ہے،

۱۰ء۳) ۶۷۲ء۵ (۱ گ ء
۲ ۰ ۳
۲۸ ۴۲
۲۷ ۴۹
گ ۵ ۰
گ ۵ ۰

(۴۱) عدد ۱۰۰۰ ع۳ + ۱۰۰ ع۲ + ۱۰ ع۱ + ع. بعض ضعف ہزار اب ہزار تو پورا آٹھ پر تقسیم ہوتا ہے اسواسطے عدد پورا آٹھ پر تقسیم ہوجائیگا اگر ۱۰۰ ع۲ + ۱۰ ع۱ + ع.

یعنی ۸ (۱۲ ع۲ + ع۱) + ۴ ع۲ + ۲ ع۱ + ع یعنی ۴ ع۲ + ۲ ع۱ + ع۔
پورا آٹھہ پر تقسیم ہوتا ہو

(۴۲) فرضکرو کہ ہر عدد کے ہندسون کا مجموعہ ص ہی تو ہر یک عدد برابر ہوا ص مع بعض اضعاف ۹ کے دفعہ ۴۴۶ دیکھو اسواسطے اعداد کا فرق ۹ کے اضعاف ہوتی

(۴۳) فرضکرو کہ ہندسون کی تعداد ن ہی اور قطاس کا اساس رہے تو جو سب سے بڑا عدد ہوگا اوسمین ر - ۱ ہندسی ہر مرتبے پر ہونگے اسواسطے وہ برابر رن - ۱ کے ہوگا اور جو سب سے چھوٹا عدد ہوگا اوسکے اخر مرتبہ پر بائین طرف ایک اور مراتب مین صفر ہونگے اسلئے وہ رن-۱ ہوگا مثال فرض کرو کہ ن = ۳ اور ر = ۱۰ تو سب سے بڑا عدد ۹۹۹ اور چھوٹا عدد ۱۰۰ ہوگا

(۴۴) فرضکرو کہ ا اور ب اعداد کو تعبیر کرتے ہین اور ا بڑا ہی اور چونکہ یہہ معلوم ہے ا + ب اساس کا اضعاف ہے اور ا۲ - ب۲ = (ا - ب) (ا + ب) اسلئے یہہ اضعاف اساس ہے پس اسی دعوی کا اول جز ثابت ہوا اور اب + ا۲ = ا(ا + ب) یہہ بہی اضعاف اساس ہی اسی ثابت ہوتا ہی کہ اگر ا۲ کو اور اب کو اساس پر تقسیم کرین تو دونو باقیون کا مجموعہ اساس کی برابر ہوگا

(۴۵) یہہ معلوم ہی کہ عدد معلوم ۲۳ اور ۵ اور ۳ پر پورا پورا تقسیم ہوتا ہے - تو علاوہ ۲ کے اوسکے پورا تقسیم کرنے والے یہہ بارہ عدد ہین ۲۲ و ۲۳ و ۲ × ۳ و ۲۲ × ۳ و ۲ × ۵ و ۲۲ × ۵ و ۳ × ۵ و ۲ × ۳ × ۵ و ۲۲ × ۳ × ۵ و ۲۳ × ۳ × ۵ یہہ بارہ عدد بارہ مستثنی قطاس ہین اور چونکہ عدد کا کوئی پورا تقسیم کرنے والا نہین ہے اسلئے وہ ۲۳ × ۳ × ۵ یعنی ۱۲۰ ہے

تیسوان باب

(۱) $\frac{۲۰}{۲}$ (۴ + ۴ × ۱۹) = ۱۸۰۰ (۲) $\frac{۳۲}{۲}$ (۸ $\frac{۱}{۲}$ ...) $\frac{۱}{۲}$ (۱ - $\frac{۱}{۲}$) = ۲۰

(۳) $\frac{۲۳}{۲}\left(\frac{۵\times۲۳}{۴}-\frac{۱}{۴}\right)=۱۵\times۲۳-۱۲=۳۳۳$

(۴) $\frac{۳۰}{۲}\left(\frac{۲\times۱۹}{۳}-۱۰\right)=۱۰\left(-\frac{۸}{۳}\right)=-۲۶\frac{۲}{۳}$

(۵) $\frac{۱۰}{۲}\left(\frac{۲\times۹}{۵}-\frac{۱۴}{۵}\right)=\frac{۱۰}{۲}\left(-\frac{۴}{۵}\right)=-۴$

(۶) $\frac{۱۲}{۲}\left(\frac{۳\times۱۱}{۴}+۲\right)=\frac{۴۱}{۴}\times۶=۶۱\frac{۱}{۲}$

(۷) $\frac{۲۱}{۲}\left(\frac{۲۰}{۲۱}-\frac{۱}{۷}\right)=\frac{۲۱}{۲}\times\frac{۱۰}{۲۱}=۵$

(۸) $\frac{۵۰}{۲}\left(\frac{۴۹}{۳}+\frac{۲}{۳}\right)=۱۷\times۲۵=۴۲۵$ (۹) $\frac{۳۰}{۲}\left(۸\times۲۹-۲۳۲\right)=۰$

(۱۰) $\frac{ن}{۲}\left[۱۸+۲(ن-۱)\right]=\frac{ن}{۲}(۲ن+۱۶)=ن(ن+۸)$

(۱۱) $\frac{ن}{۲}\left[\frac{۱-ن}{۶}-۲\right]=\frac{ن}{۲}\times\frac{۱+ن-۱۲}{۶}=\frac{(ن-۱۳)ن}{۱۲}$

(۱۲) فرض کرو کہ فرق مشترک ب ہے تو اول پانچ رقموں کا مجموعہ $\frac{۵}{۲}(۲+۴ب)$ ہے اور آگے پانچ رقموں کا مجموعہ $\frac{۵}{۲}\left[۲(۱+۵ب)+۴ب\right]$ ہے اسلئے کہ اول رقم ۱+۵ب ہے
اسواسطے $\frac{۵}{۲}(۲+۴ب)=\frac{۱}{۴}\times\frac{۵}{۲}\left[۲+۱۴ب\right]$ اسواسطے $۴(۲+۴ب)=۲+۱۴ب$

(۱۳) یہاں ا = ۲ اور ۷ = ۲+۴ب اسواسطے ب = $\frac{۵}{۴}$ اور
$۶۳=\frac{ن}{۲}\left[۴+\frac{۵}{۴}(ن-۱)\right]=\frac{ن}{۸}(۵ن+۱۱)$

(۱۴) $۸۸=\frac{ن}{۲}\left[۳۲+۴(ن-۱)\right]=ن(۲ن+۱۴)$

(۱۵) یہاں $\frac{م}{۲}\left[۲+(م-۱)ب\right]:\frac{ن}{۲}\left[۲+(ن-۱)ب\right]::م^۲:ن^۲$
اسواسطے $م\,ن^۲\left[۲+(م-۱)ب\right]=م^۲ن\left[۲+(ن-۱)ب\right]$ اسواسطے
$ن\left[۲+(م-۱)ب\right]=م\left[۲+(ن-۱)ب\right]$ اسواسطے $۲(ن-م)=ب(ن-م)$ اسواسطے ب = ۲
اور ن ویں رقم $=۱+(ن-۱)ب=۱+۲ن-۲=۲ن-۱$

(۱۶) $۱۲۰=\frac{ن}{۲}\left[۴۲-۲(ن-۱)\right]=ن(۲۲-ن)$ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ن = ۱۰ یا ۱۲
اگر ن = ۱۰ تو آخر رقم $=۲۱-۲\times۹=۳$ اگر ن = ۱۲ تو آخر رقم $=۲۱-۲\times۱۱=-۱$

(۱۷) $۲۰۴=\frac{ن}{۲}\left[ا+ل\right]=\frac{۱}{۲}ن(۵۰+۱)$ اسواسطے ن = ۸ اور ۵۰ = ۱+۷ب

اور ب = ۷

(۱۸) ۲۹ = ۱ + ۷ ب اسواسطے ب^۲ = ۴

(۱۹) سلسلہ ۱ و ۵ و ۹ ۰۰ کی ن + ۱ رقموں کا مجموعہ ن+۱/۲ [۲ + ۴ن] اور سلسلہ ۳ و ۷ و ۱۱ کی ن رقموں کا مجموعہ ن/۲ [۶ + ۴ (ن - ۱)] یعنی ن/۲ [۲ + ۴ن] ان دونوں مجموعوں کی نسبت مطلوب ہے

(۲۰) ا = ۱ اور ب = ۴ تو ص = ن/۲ [۲ + ۴ (ن - ۱)] = ن (۲ن - ۱)

(۲۱) ۱ + ۲ + ۳ + ۴ ۔۔۔ = ن/۲ [۲ + ۲ (ن - ۱)] = ن^۲

(۲۲) ۱۸۴۰ = ن/۲ [۳۲ + ۸ (ن - ۱)] = ن [۴ن + ۱۲]

(۲۳) ظاہر ہے کہ ن - ۱ دفعہ چلنا پڑیگا اول دفعہ مین ۲ گز مسافت طی ہوگی اور دوسرے دفعے ۲ (۱ + ۳) گز اور تیسرے دفعہ ۲ (۱ + ۳ + ۵) گز اور علیٰ ہذا القیاس اول مسافت ۲ × ۱ گز اور دوسرے مسافت ۲ × ۴ اور تیسرے مسافت ۲ × ۹ اور علیٰ ہذا القیاس ہے - پس بموجب کل مسافت ۲ [۱ + ۲^۲ + ۳^۲ ۰۰۰ ن - ۱ رقموں تک] ہوئی اور یہہ بحکم دفعہ ۴۶۰ = (ن - ۱) ن (۲ن - ۱)/۳ اس دفعہ ن کے جگہہ ن - ۱ رکہا اور ماحصل کو دو چند کر لیا ہے

(۲۴) ۶۶ = ۹ + ۱۳ ب اور ۶۶۶ = ۹ + ۱۳۳ ب اور ۶۶۶۶ = ۱ + (ن - ۱) ب

اول اور دوم مساوات سے ا = ۱ اور ب = ۵ اور تیسرے مساوات میں ن - ۱ = ۱۳۳۳

اسلئی ن = ۱۳۳۴

(۲۵) فرضکرو کہ اوساط کی تعداد ن ہے تو ۲۱ = ۱ + (ن - ۱) ب اسواسطے ب = ۲۰/ن - ۱ اول وسط ۱ + ب اور آخر وسط ۲۱ - ب ہے اسواسطے اوساط کا مجموعہ = ن/۲ [۱ + ب + ۲۱ - ب] = ۱۱ ن اور جو دو وسط بڑی ہین وہ آخر کے ہین یعنی ۲۱ - ب اور ۲۱ - ۲ب اسواسطے ۱۱ن : ۴۲ - ۳ب :: ۱۱ : ۴ اسواسطے ۴ن = ۴۲ - ۳ب = ۴۲ - ۶۰/ن - ۱ اسواسطے ۴ن^۲ - ۳۸ن + ۱۸ = ۰

اس مساوات مین جو قیمت داخل ہو سکتی ہے وہ ۹ ہے

(۲۶) ۲۸½ = ن/۲ [-۲۴ + ۳/۲ (ن-۱)] = ن/۴ [۳ن - ۵۱] ∴ ن = ۱۹ یا -۲

(۲۷) ۲۵ = ن/۲ [۶ + (ن-۱)] = ن(ن+۵)/۲

(۲۸) ۱۴ = ن/۲ [-۱۰ + (ن-۱)] = ن/۲ (ن-۱۱)

(۲۹) ص = ن/۲ [۲ا + (ن-۱) ب] فنا ہوجائیگا اگر ۲ا + (ن-۱) ب صفر ہو یعنی ن-۱ = -۲ا/ب
اسے معلوم ہوا کہ ن صحیح عدد جب ہی ہوسکتا ہی کہ ۲ا کو ب پورا پورا تقسیم کرے اور اوسکی
علامت متضاد علامت اکے ہو

(۳۰) ن = ا + (م-۱) ب اور م = ا + (ن-۱) ب تفریق کرنے سے
ن - م = (م-ن) ب اسواسطے ب = -۱ اسی معلوم ہوا کہ ا = م + ن - ۱
فرض کرو کہ ارقام مطلوبہ کی تعداد لا ہی تو ½ (م+ن) (م+ن-۱) = لا/۲ [۲ (م+ن-۱) - (لا-۱)]
اسواسطے لا² - لا (۲م + ۲ن - ۱) + (م+ن) (م+ن-۱) = ۰
اسواسطے [لا - (۲م+۲ن-۱)/۲]² = ((۲م+۲ن-۱)/۲)² - (م+ن) (م+ن-۱) = ¼
اسواسطے لا - (۲م+۲ن-۱)/۲ = ± ½ اسواسطے لا = م + ن یا م + ن - ۱ اور
اول صورت میں اخر رقم ہے اور دوسرے صورت میں صفر

(۳۱) ۷۲ = ن/۲ [۴۸ - ۴ (ن-۱)] = ن (۲۶ - ۲ن)

(۳۲) ع ن + ق ن² = ن/۲ [۲ا + (ن-۱) ب] = ن/۲ [۲ا - ب + ن ب] = ن/۲ (۲ا - ب) + ن² ب/۲
چونکہ اس مساواتیں ن کی ہر یک قیمت ہوسکتی ہی اسلئے اوسکی جگہہ متواتر اعداد ۱ و ۲ و ۳ ... رکہی
تو ہم کو یہہ دریافت ہوگا کہ (۲ا - ب)/۲ = ع اور ب/۲ = ق اسواسطے ب = ۲ق اور
۲ا = ۲ع + ب = ۲ع + ۲ق تو م وین رقم = ا + (م-۱) ب = ع + ق + ۲ (م-۱) ق

(۳۳) ص_ا = ن/۲ [۲ا + ن - ۱]
ص_{۲ا+ن-۱} = ن/۲ [۲ (۲ا + ن - ۱) + ن - ۱] = ن/۲ [۶ا + ۳ن - ۳] = ۳ص_ا

(۳۴) یہہ ثابت کرتا ہی کہ (لا² - ۲لا - ۱)² + (لا² + ۲لا - ۱)² = ۲ (لا² + ۱)² اور یہہ ظاہر ہے

(۳۵) ل² - ا² = [ا + (ن - ۱) ب]² - ا² = (ن - ۱) ب [۲ا + (ن - ۱) ب]

اور کل رقموں کا دو چند مجموعہ = ن [۲ا + (ن - ۱) ب] = ۲ن ا + ن (ن - ۱) ب

اب اسمیں سے اول و آخر رقم کا مجموعہ یعنی ۲ا + (ن - ۱) ب تفریق کرو تو باقی

(ن - ۱) [۲ا + (ن - ۱) ب] اسکو ل² - ا² پر تقسیم کرو تو خارج قسمت ب نکلے گا

(۳۶) ن = م/۲ [۲ا + (م - ۱) ب] ... (۱) م = ن/۲ [۲ا + (ن - ۱) ب] ... (۲)

ان مساواتوں سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ ب = -۲(م + ن)/م ن اور ا = (م² + ن² + م ن - م - ن)/م ن اسلئے

م + ن رقموں کا مجموعہ = (م + ن)/۲ [۲ا + (م + ن - ۱) ب]

= (م + ن)/۲ [(۲م² + ۲ن² + ۲م ن - ۲م - ۲ن)/م ن - ۲(م + ن - ۱)(م + ن)/م ن] = -(م + ن)

یا اسطرح عمل کریں کہ م + ن رقموں کا مجموعہ = (م + ن)/۲ [۲ا + (م + ن - ۱) ب] اور

مساوات (۱) اور (۲) کی تفریق کرنے سے ۲(ن - م) = ۲ا (م - ن) + (م - ن)(م + ن) ب

م - ن پر تقسیم کرو تو -۲ = ۲ا + (م + ن - ۱) ب اسواسطے

م + ن رقموں کا مجموعہ = -(م + ن) ابھی ہم نے لکھا ہے کہ -۱ = ا + (م + ن - ۱) ب/۲

اور مساوات (۱) سے ۲ن/م = ۲ا + (م - ۱) ب اسواسطے تفریق کرنے سے

۲ن/م + ۱ = ا + (م - ۱ - ن) ب/۲ اسی ثابت ہوا کہ م - ن رقموں کا مجموعہ = (م - ن)(۱ + ۲ن/م)

(۳۷) فرض کرو کہ اوساط کی تعداد ن ہے اور دوسرا اوسط ۱ + ۲ب اور آخر اوسط ۱۹ - ب

اسلئے ۱ + ۲ب : ۱۹ - ب :: ۱ : ۹ اسواسطے ب = ۱ اور ۱۹ = ۱ + (ن + ۱) ب

اسواسطے ن = ۱۷

(۳۸) ۵۳۵۰ = ن/۲ [۸ + (ن - ۱)] = ن/۲ (ن + ۷) اسلئے ن = ۱۰۰ یا -۱۰۷

(۳۹) فرض کرو کہ تعداد ارقام ۲ن + ۱ ہے تو سلسلہ

ا + (ا + ۲ب) + (ا + ۴ب) وغیرہ کے ن + ۱ رقموں کا مجموعہ ۴۴ ہے اسلئے

۴۴ = (ن + ۱)/۲ [۲ا + ۲ب ن] اور سلسلہ ا + ب + (ا + ۳ب) وغیرہ کے ن رقموں کا مجموعہ

۳۳سی اسلئے ۳۳ = ن/۲ [۲ا + ۲(ن − ۱) ب] = ن/۲ [۲ا + ۲ب ن]

اب تقسیم کرنے سی ۳۴۴/۳۳ = (ن + ۱)/ن اسواسطے ن = ۳۳ اور ۲ن + ۱ = ۱۷ اور رقم اوسط = ا + ن ب = موافق بیان مذکور کے = ۳۴۴/(ن + ۱) = ۱۱

(۴۰) ۱/(ب + ح) و ۱/(ح + ا) و ۱/(ا + ب) سلسلہ حسابیہ مین جب ہونگے کہ ۱/(ب + ح) + ۱/(ا + ب) = ۲/(ح + ا) یعنے (ح + ا) (ا + ۲ب + ح) = ۲(ب + ح) (ا + ب) یعنے ا۲ + ح۲ = ۲ ب۲ اور یہہ بموجب فرض کے صحیح ہے

(۴۱) اب یہان رقم اول ا ہی اور فرق عام ۲ ہے پس

ص = ن/۲ [۲ + ۲ (ن − ۱)] = ن۲

(۴۲) اب اس سوال حل کرنے کی دو ترکیبین ہوسکتی ہین اول یہہ کہ اول سلسلہ ۱ + ۵ + ۹ + وغیرہ کو جمع کرین اور پہر سلسلہ ۳ + ۷ + ۱۱ + وغیرہ کو جمع کرین اور دوسرے مجموعہ کو اول مجموعہ مین سے تفریق کرین دوسرے یہہ کہ اول دوم رقمون کا مجموعہ −۲ ہے اور تیسرے اور چوتہی رقمون کا مجموعہ ہی −۲ ہے اسلئے اگر ن جفت ہو تو مجموعہ −۲ × ن/۲ یعنی ن ہوگا اور اگر ن طاق ہو تو مجموعہ −(ن − ۱) + رقم آخر یعنی −(ن − ۱) + ۲ن − ۱ یعنی ن ہوگا پس اگر ن جفت ہو تو مجموعہ −ن ہی اور اگر ن طاق ہو تو مجموعہ + ن ہے پس مجموعہ ن (−۱)ن ہے

(۴۳) اسکا حال بہی بیالیس مثال کا سا ہی اگر ن جفت ہو تو مجموعہ − ن/۲ ہی اور اگر ن طاق ہو تو مجموعہ (ن + ۱)/۲ ہی − امتحان سی یہہ امر ثابت ہوگا کہ دو نو صورتون مین مجموعہ ۱/۴ [۱ − (۲ن + ۱) (−۱)ن] ہے

(۴۴) ع = ا + (عَ − ۱) ب اور ق = ا + (قَ − ۱) ب اسواسطے

ا = (ع قَ − ق عَ)/(قَ − عَ) اور ب = ((عَ − ۱) ق − (قَ − ۱) ع)/(عَ − قَ)

ان قیمتون کو ص = ن/۲ [۲ا + (ن − ۱) ب] مین مندرج کرو مطلب حاصل ہے

(۴۵) لا = ا + (ع − ۱) ب اور ی = ا + (ق − ۱) ب اور ی = ا + (ر − ۱) ب ان مساواتون مین سے اول مساوات سے ع − ۱ = − ا/ب + لا/ب اسواسطے ع = ۱ + لا/ب − ا/ب + (لا − ۱) ۱/ب اور علی ہذا القیاس

ق = ۱ + (ل - ۱)/ب + (ک - ۱) ل/ب اور ر = ۱ + (ل - ۱)/ب + (ی - ۱) ل/ب اسی ثابت ہوتا ہے
کہ یہہ لاوین اور کوین اور روین رقمین اوس سلسلہ حسابیہ کی ہین جسکی اول رقم ۱ + (ل - ۱)/ب ہے اور
فرق عام ل/ب ہے اور ب × ل/ب = ۱

(۴۶) فرضکرو کہ شکل کے اضلاع ن ہین تو اوسکے تمام زاویون کی تعداد درجہ = ن/۲ [۲۴۰ + ۵ (ن - ۱)]
اور بحکم (۲۳ ش ام) کی زاویون کے درجون کی تعداد = (۲ن - ۴) × ۹۰ پس
ن/۲ [۲۴۰ + ۵ (ن - ۱)] = (۲ن - ۴) × ۹۰ اسواسطے ن² - ۲۵ن + ۱۴۴ = ۰
اس مساوات درجہ دوم کی قیمتین ۹ اور ۱۶ ہین دوسری قیمت مساوات مین داخل ہونے کی قابل نہین ہے
اسلئی کہ زاویہ دو قائموں سے بڑا ہو جایگا

(۴۷) پہلی رقم = ۱ + ۱ اور دوسری رقم = ۲² + ۲ اور تیسری رقم = ۳² + ۳ اور علی ہذا القیاس
پس اب دو سلسلون کا حاصل جمع دریافت کرنا ہے ایک سلسلہ ۱ + ۲ + ۳ + وغیرہ اور دوسرے سلسلہ
۱² + ۲² + ۳² + وغیرہ کا پہلے سلسلہ کا مجموعہ ن(ن + ۱)/۲ ہے اور دوسرے ن(ن + ۱)(۲ن + ۱)/۶
ان دونو کے جمع کرنے سے یہہ حاصل ہوگا کہ ن(ن + ۱)/۲ [۱ + (۲ن + ۱)/۳] یعنی ن(ن + ۱)(ن + ۲)/۳

(۴۸) (ا + ب)² = ا (ا + ۳ب) اسواسطے ب² = اب اور ب = ا اسواسطے
(ا + ۵ب)² = (ا + ۳ب) (ا + ۸ب)

(۴۹) مج (ن) = ن/۲ [۲ا + (ن - ۱) ب] فرضکرو کہ سلسلہ کے دوسری رقم صہ ہے تو صہ = ا + ب
اسواسطے ب = صہ - ا اور مج (ن) = ن² (صہ - ا)/۲ + ن (۳ا - صہ)/۲ اس سے معلوم ہوا کہ
مج (ن + ۳) - ۳ مج (ن + ۲) + ۳ مج (ن + ۱) - مج (ن)
= (صہ - ا)/۲ [(ن + ۳)² - ۳ (ن + ۲)² + ۳ (ن + ۱)² - ن²]
+ (۳ا - صہ)/۲ [ن + ۳ - ۳ (ن + ۲) + ۳ (ن + ۱) - ن]
یہہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ یہہ دونو جملے ایک دوسرے کو فنا کرتے ہین

(۵۰) اول رقم = ۵ - ۱/۲ اور فرق عام - ۱/۲ ہے پس

س = ن/۲ [۹ − (ن−۱)/۲] = ن/۴ [۱۹ − ن]

(۵۱) فرضکرو کہ حصص مطلوب لا−۳ی و لا−ی و لا+ی و لا+۳ی ہون اور یہہ سلسلہ حسابیہ مین ہین جنکا فرق عام ۲ی ہی اور چونکہ اوسکا مجموعہ ایک ہی اسلیے ۴لا = ۱ اور بس (لا−۳ی)^۳ + (لا−ی)^۳ + (لا+ی)^۳ + (لا+۳ی)^۳ = ۱/۱۰ اور اوسکا اختصار کرو تو یہہ مساوات حاصل ہوگی کہ ۴لا^۳ + ۶۰ لا ی^۲ = ۱/۱۰ قیمت لا مندرج کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ ی^۲ = ۱/۴۰۰ اسواسطے ی = ± ۱/۲۰

اب یہان ہم نی مقادیر مجہول کے مقرر کرنیمین ایسی حکمت عملی کی کہ جسسے عمل نہایت آسان ہوگیا اس حکمت کو طالب علم ہمیشہ یاد رکہین - اگر سلسلہ مین تین مقادیر مجہول مقرر کرنی ہون توبجای لا اور لا+ی اور لا+۲ی کے ہم کو لا−ی اور لا اور لا+ی مقرر کرنی چاہیے اس فرض سی عمل مین نہایت آسانی ہوجائیگی - غرض یہہ حکمت بڑی کام کی ہی - یاد رکہو

(۵۲) فرض کرو کہ اول مہینہ کی تنخواہ ا اور تعداد یا بار ملازمت ن ہی چونکہ ا کل مرسلہ مین ا+ن−۱ = ۶۰ اور کل مقدار تنخواہ کے ۴۸ ان مہینان ہین اسواسطے ۴۸ن = ن/۲ [۲ا + (ن−۱)]

یعنے ۴۸ = ۱/۲ [ا + ۶۰] اسواسطے ا = ۳۶ اور ن = ۲۵

(۵۳) فرضکرو کہ لا گہنٹے بکر چلا تو زید لا+۴ ۱/۲ گہنٹے چلا اسواسطے

۵(لا + ۴ ۱/۲) = لا/۲ [۶ + (لا−۱)/۲] = لا^۲/۴ + ۱۱لا/۴ لو لا^۲ − ۹لا − ۹۰ = ۰

اسواسطے لا = ۱۵ یا −۶

(۵۴) فرضکرو کہ سب سے پچہلی مزدور نے لا گہنٹہ کام کیا - اور اس پچہلی آدمی نے جسنے پہلی پہر کام شروع کیا اوسنے ر لا گہنٹہ کام کیا اور علی ہذا القیاس اول آدمی نے ر لا گہنٹہ کام کیا تو کل تعداد گہنٹون کے جنمین کام ختم ہوا لا ر (ر+۱)/۲ ہی اور بموجب فرض کے یہہ برابر م ر کے ہی اسواسطے لا = ۲م/(ر+۱)

اور ر لا = ۲م ر/(ر+۱)

(۵۵) فرضکرو کہ لا سیکڑون کو اور ی دہائیون کو اور ی اکائون کو تعبیر کرتا ہی تو عدد ۱۰۰لا + ۱۰ی + ی ہوگا اسواسطے ۱۰۰لا + ۱۰ی + ی = ۲۶ (لا + ی + ی) اور

(۱۸) دفعہ ۳۴۷ مین ا = ر اور ب = ر کے رکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{ر - ن ر^{ن+۱}}{۱ - ر} + \frac{ر^۲(۱ - ر^{ن-۱})}{(۱ - ر)^۲}$$

(۱۹) دفعہ ۳۴۷ مین ا = ۱ اور ب = ۱ اور ر = ½ کے رکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{۱ - \frac{ن}{۲^ن}}{۱ - \frac{۱}{۲}} + \frac{\frac{۱}{۲}(۱ - \frac{۱}{۲^{ن-۱}})}{(۱ - \frac{۱}{۲})^۲} = ۲ - \frac{ن}{۲^{ن-۱}} + ۲(۱ - \frac{۱}{۲^{ن-۱}}) = ۴ - \frac{ن+۲}{۲^{ن-۱}}$$

(۲۰) دفعہ ۳۴۷ مین ا = ۱ اور ب = ۲ اور ر = ½ کے رکھو تو

$$\frac{۱ - \frac{۲ن - ۱}{۲^ن}}{۱ - \frac{۱}{۲}} + \frac{\frac{۱}{۲^{ن-۱}} - ۱}{۲(\frac{۱}{۲} - ۱)^۲}... = ۲ - \frac{۲ن - ۱}{۲^{ن-۱}} + ۴ - \frac{۴}{۲^{ن-۱}} = ۶ - \frac{۲ن + ۳}{۲^{ن-۱}}$$

(۲۱) دفعہ ۳۴۷ مین ا = ۱ اور ب = ۲ اور ر = -½ کے رکھو

$$\frac{۱ - \frac{۲ن - ۱}{(-۲)^ن}}{\frac{۱}{۲} + ۱} - \frac{\frac{۱}{(-۲)^{ن-۱}} - ۱}{۲(\frac{۱}{۲} + ۱)^۲} = \frac{۲}{۳} - \frac{۲ن - ۱}{۳(-۲)^{ن-۱}} + \frac{۴}{۹} - \frac{۴}{۹(-۲)^{ن-۱}}$$

$$= \frac{۲}{۹} + \frac{۶ن + ۱}{۹(-۲)^{ن-۱}}$$

(۲۲) فرضکرو کہ ا اول رقم اور ح تیسری رقم ہی تو ح = ار^۲ اسواسطے ر = ± $\sqrt{\frac{ح}{ا}}$
اب اس قیمت کو جملہ مین کہ سلسلہ ہندسیہ کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہو مندرج کرو

(۲۳) $(-۳)^۴ = ۸۱$

(۲۴) فرض کرو کہ سب سے چھوٹا حصہ ا اور اوس سے بڑا ار اور اوس سے بڑا ار^۲ اور سب سے بڑا ار^۳ ہی تو

$$ا + ار + ار^۲ + ار^۳ = ۷۰۰ \quad اور \quad ار^۳ - ا = \frac{۳۷}{۱۲}(ار^۲ - ار)$$

دوسرے مساوات سے یہہ حاصل ہوتا ہی کہ $ر^۳ - ۱ = \frac{۳۷ ر(ر - ۱)}{۱۲}$ اسواسطے $۱۲(ر^۲ + ر + ۱) = ۳۷ر$

(۲۵) پہلی رقم $-ا^۲$ ہے اور نسبت مشترک $-ا^۲$ ہے مجموعہ

$$= -ا^۲ \frac{(-ا^۲)^ن - ۱}{-ا^۲ - ۱} = \frac{ا^۲}{۱ + ا^۲}\left[-(-ا^۲)^ن - ۱\right]$$

(۲۶) $ع = \frac{۱}{۱ - ر}$ اور $ق = \frac{۱}{۱ - ر^ن}$ اور $ع - ۱ = \frac{ر}{۱ - ر}$ اور $ق - ۱ = \frac{ر^ن}{۱ - ر^ن}$

$$ع^ن(ق - ۱) = \frac{ر^ن}{(۱ - ر)^ن(۱ - ر^ن)} = ق(ع - ۱)^ن$$

(۲۷) ۰٫۴۴۴ وغیرہ $= \frac{۴}{۹}$ اور ۰٫۶۶۶ وغیرہ $= \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳}$

(۲۸) فرضکرو کہ اول سال مین ا روپیہ بچایا تو دوسرے سال مین $\frac{۳}{۲}$ ا روپیہ بچایا پس تیسرے سال مین ہوگا اور $\frac{۳}{۲} \times \frac{۳}{۲}$ ا یعنی $\frac{۹}{۴}$ ا روپیہ علی ہذا القیاس اسواسطے

$$\frac{ا\left(\left(\frac{۳}{۲}\right)^{۷}-۱\right)}{\frac{۳}{۲}-۱} = ۱۲۸\frac{۱۱}{۱۶} \text{ یعنی } ۲ا\left(\frac{۲۱۸۷}{۱۲۸}-۱\right) = \frac{۲۰۵۹}{۱۶} \text{ پس}$$

ا = ۴ روپیہ

(۲۹) ان وین رقم معلوم کو ن مان فرضکرو یعنی $ار^{ن-۱}$ تو (ن + ع) وین رقم $ار^{ن+ع-۱}$ ہوگی اور (ن − ع) وین رقم $ار^{ن-ع-۱}$ ہوگی اسکا حاصل ضرب $ا^{۲}ر^{۲ن-۲}$ اس رقم کے مقدار ہمیشہ ایک ہی ہوگی خواہ ع کچھ ہی ہو

(۳۰) فرض کرو کہ سلسلہ ہندسیہ ا و ار و $ار^{۲}$ و $ار^{۳}$ ... ہے اب ہر رقم کو اپنے مابعد کے رقم سے تفریق کرو تو ا(ر−۱) اور ار(ر−۱) اور $ار^{۲}$(ر−۱) حاصل ہونگے اور یہہ ہی سلسلہ ضربیہ ہے جسکے نسبت مشترک ر ہے

(۳۱) فرضکرو کہ دو مقدار ا اور ب ہین تو اونکے اوسط حسابیہ کا مجذور $\left(\frac{ا+ب}{۲}\right)^{۲}$ ہوگا اور $ا^{۲}$ اور $ب^{۲}$ کا اوسط حسابیہ $\frac{ا^{۲}+ب^{۲}}{۲}$ ہی اور اوسط ہندسیہ $\sqrt{ا^{۲}ب^{۲}}$ یعنی اب ہے اور اوسط حسابیہ $\frac{ا^{۲}+ب^{۲}}{۲}$ اور اب کا $\frac{۱}{۲}\left[\frac{ا^{۲}+ب^{۲}}{۲}+اب\right]$ یعنی $\left(\frac{ا+ب}{۲}\right)^{۲}$ ہے

(۳۲) دفعہ ۴۶۴ کے موافق $= \frac{۱}{۱۰+۱} = \frac{۱}{۱۱}$

(۳۳) $ص_{۱} = \frac{ا(ر-۱)}{ر-۱}$ اور $ص_{۲} = \frac{ا(ر^{۲}-۱)}{ر-۱}$ اور $ص_{۳} = \frac{ا(ر^{۳}-۱)}{ر-۱}$ . . .

تو ایسے ن رقمون کا مجموعہ $= \frac{ا}{ر-۱}\left[ر+ر^{۲}+\ldots ر^{ن}-ن\right]$

$$\frac{ا}{ر-۱}\left[\frac{ر(ر^{ن}-۱)}{ر-۱}-ن\right] = \frac{را(ر^{ن}-۱)}{(ر-۱)^{۲}} - \frac{ن ا}{ر-۱}$$

(۳۴) بموجب دفعہ ۴۶۹ کے حاصل ضرب $= ا^{ن}ر^{ص}$ جسمین ص بجای ۱+۲+...+ن کا ہے یعنی $\frac{ن(ن+۱)}{۲}$ ہی اور $ار^{ن+۱} = ح$ پس $ر^{ص} = \left[\frac{ح}{ا}\right]^{\frac{ن}{۲}}$ اور $ا^{ن}ر^{ص} = (اح)^{\frac{ن}{۲}}$

(۳۵) ص = ا(ر^ن − ۱)/(ر − ۱) اور صَ = (۱/ا)(۱ − ۱/ر^ن)/(۱ − ۱/ر) = (ر^ن − ۱)/(ا ر^(ن−۱) (ر − ۱)) اسواسطے

ل صَ = ا^۲ ر^(ن−۱) (ر^ن − ۱)/(ر^(ن−۱) (ر − ۱)) = ا (ر^ن − ۱)/(ر − ۱) = ا ص

(۳۶) (ا^۲ + ب^۲ + ح^۲) (ب^۲ + ح^۲ + د^۲) = ا^۲ (۱ + ر^۲ + ر^۴) ا^۲ ر^۲ (۱ + ر^۲ + ر^۴)

= ا^۴ ر^۲ (۱ + ر^۲ + ر^۴)^۲ اور (اب + بح + حد)^۲ = (ا^۲ر + ا^۲ر^۳ + ا^۲ر^۵)^۲ = ا^۴ ر^۲ (۱ + ر^۲ + ر^۴)^۲

(۳۷) (ا − د)^۲ = ا^۲ (۱ − ر^۳)^۲ = ا^۲ (۱ − ر)^۲ (۱ + ر + ر^۲)^۲ اور

(ب − ح)^۲ + (ح − ا)^۲ + (د − ب)^۲ = ا^۲ ر^۲ (۱ − ر)^۲ + ا^۲ (۱ − ر^۲)^۲ + ا^۲ (ر − ر^۳)^۲

= ا^۲ (۱ − ر)^۲ [ر^۲ + (۱ + ر)^۲ + ر^۲ (۱ + ر)^۲]

اور یہہ ظاہر ہے کہ ر^۲ + (۱ + ر)^۲ + ر^۲ (۱ + ر)^۲ = (۱ + ر + ر^۲)^۲

(۳۸) ا + ار + ار^۲ = ۲۱ اور ا + ار + ار^۲ + ار^۳ = ۴۵

تقسیم (۱ + ر + ر^۲ + ر^۳)/(۱ + ر + ر^۲) = ۴۵/۲۱ اسواسطے ر^۳/(۱ + ر + ر^۲) = ۲۴/۲۱ = ۸/۷

اسواسطے ۷ ر^۳ = ۸ (۱ + ر + ر^۲) اور قیاس سے ر = ۲ کے نکال لیں

(۳۹) مجذور کرنے سے ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

ر^۲ + ر^۴ + ر^۶ ... + ر^(۲ن) + ۱/ر^۲ + ۱/ر^۴ + ۱/ر^۶ ... ۱/ر^(۲ن) − ۲ن یعنے

ر^۲ (ر^(۲ن) − ۱)/(ر^۲ − ۱) + (۱/ر^۲)(۱ − ۱/ر^(۲ن))/(۱ − ۱/ر^۲) − ۲ن یعنی (ر^(۲ن) − ۱)/(ر^۲ − ۱) (ر^۲ + ۱/ر^(۲ن))

(۴۰) ۵ = ۵(۱۰ − ۱)/(۱۰ − ۱) اور ۵۵ = ۵(۱۰^۲ − ۱)/(۱۰ − ۱) اور ۵۵۵ = ۵(۱۰^۳ − ۱)/(۱۰ − ۱) اور علی ہذا

پس سلسلہ = ۵/۹ [۱۰ + ۱۰^۲ + ... + ۱۰^ن − ن]

= ۵/۹ [۱۰(۱۰^ن − ۱)/(۱۰ − ۱) − ن] = ۵۰/۸۱ (۱۰^ن − ۱) − ۵ن/۹

(۴۱) فرض کرو کہ ایک مقدار لا اور دوسری مقدار ی ہے تو ا = (لا + ی)/۲ اور ح = √(لا ی) اسواسطے ا + ح = (√لا + √ی)^۲/۲ اور ا − ح = (√لا − √ی)^۲/۲ اسواسطے

ا^۲ − ح^۲ = (لا − ی)^۲/۴ اور (لا − ی)/۲ = √(ا^۲ − ح^۲) اور لا = ا + √(ا^۲ − ح^۲)

اسسے معلوم ہوا کہ اسکے کے دو رقمین ۱۰۳/۱۱ اور ۳/۲ ہین

(۲) ۱ اور ۲۰ کے درمیان ۱۱۸ وساط سلسلہ حسابیہ مین مندرج کرنی چاہیے ۲۰ = ۱ + ۱۹ ب یا ب = ۱/۱۰۱
ب = ۱۱ اور سلسلہ حسابیہ مین اوساط ۲ و ۳ و ۴ وغیرہ مین اسواسطے اوساط سلسلہ موسیقیہ مین
۱/۲ و ۱/۳ ... ہین

(۳) اس سلسلہ موسیقیہ کے مطابق جو سلسلہ حسابیہ لیا جائیگا اوسکی اول رقم ۱/ا اور دوسری رقم ۱/ب ہوگی
اور ن وین رقم اوسکی ۱/ا + (ن − ۱) (۱/ب − ۱/ا) = ب + (ن − ۱) (ا − ب) / ا ب ہوگی اسکا
مقلوب ا ب / ب + (ن − ۱) (ا − ب) رقم مطلوب ہوگی

(۴) رقم مطلوب کو لا سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ اول رقم ا ہی اور ب
اس سلسلہ موسیقیہ کے مطابق جو سلسلہ حسابیہ لیا جائے اوسکا فرق عام ب ہے ۔ تو
۱/ع = ۱ + (ع − ۱) ب اور ۱/ق = ۱ + (ق − ۱) ب اور ۱/لا = ۱ + (ع + ق − ۱) ب
ا اور ب کو اول اور دوم مساوات سے دریافت کرکے تیسری مساوات مین ان قیمتوں کو مندرج کرو
یا اسطرح عمل کرو کہ اول مساوات کو ع اور دوسرے مساوات کو ق مین ضرب دیے اور تفریق کرو تو
ع/ع − ق/ق = (ع − ق) [۱ + (ع + ق − ۱) ب] = (ع − ق) × ۱/لا

(۵) فرضکرو کہ تین مقادیر معلوم ا و ب و ح ہین اور لا وہ مقدار ہے جو ہر یک سے تفریق کیجائے
تو ا − لا اور ب − لا اور ح − لا متوالیہ موسیقیہ ہوئی اسواسطے ب − لا = ۲ (ا − لا) (ح − لا) / ا + ح − ۲ لا
اسے لا = ۲ ا ح − ب (ا + ح) / ا + ح − ۲ ب حاصل ہوتا ہے

(۶) فرضکرو کہ مقادیر ا و ب و ح سلسلہ موسیقیہ مین ہون تو ب = ۲ ا ح / ا + ح پس
ا − ب/۲ = ا² / ا + ح اور ب/۲ = ا ح / ا + ح اور ح − ب/۲ = ح² / ا + ح
اور یہ تینوں ما حصل ظاہر سلسلہ ہندسیہ مین معلوم ہوتے ہین

(۷) اگر ا و ب و ح سلسلہ حسابیہ مین ہون تو ب = ا + ح / ۲ پس
ب² − ا ح = (ا + ح / ۲)² − ا ح = (ا − ح)² / ۴ بہ نسبت سے

اگر ا و ب و ح سلسلہ ہندسیہ مین ہون تو $ب^2 - اح = 0$ اگر ا و ب و ح
سلسلہ موسیقیہ مین ہون تو $ب^2 - اح = \frac{4ا^2ح^2}{(ا+ح)^2} - اح = \frac{اح}{(ا+ح)^2}\left[4اح - (ا+ح)^2\right]$
$= -\frac{اح(ا-ح)^2}{(ا+ح)^2}$ یہہ منفی ہے

(۸) فرض کرو کہ لا اور د اعداد مطلوب ہین
$\frac{1}{2}(لا+د) = 13$ اور $\frac{2لاد}{لا+د} = \frac{8}{3}$

(۹) فرضکرو کہ ا اور ب اعداد کو تعبیر کرتے ہین اوسط ہندسیہ
$= \sqrt{اب} = \sqrt{\frac{2اب}{ا+ب} \times \frac{ا+ب}{2}}$ اور $\frac{ا+ب}{2} - \frac{2اب}{ا+ب} = \frac{(ا-ب)^2}{2(ا+ب)}$

(۱۰) $ی = \frac{2اب}{ا+ب}$ اور $ی - ا = \frac{اب-ا^2}{ا+ب}$ اور $ی - ب = \frac{اب-ب^2}{ا+ب}$
$\frac{1}{ی-ا} + \frac{1}{ی-ب} = \frac{ا+ب}{ا(ب-ا)} + \frac{ا+ب}{ب(ا-ب)} = \frac{ا+ب}{ب-ا}\left[\frac{1}{ا} - \frac{1}{ب}\right] = \frac{ا+ب}{اب} = \frac{1}{ا} + \frac{1}{ب}$

(۱۱) فرض کرو کہ سب سے چھوٹا عدد لا اور اوسے بڑا د اور سب سے بڑا ی ہے
$د = \frac{2لای}{لا+ی}$ اور $ی = لاد$ اور $ی + 1 = لا + د + ی$
اب دوسرے مساوات سے قیمت نکال کر اول مساوات مین رکہو تو $د = 2لا - 1$ اور
$لا(2لا-1) + 1 = لا + 2لا - 1 + 2$

(۱۲) فرضکرو کہ لا اور د دو رقمین ہین تو $لا + د = \frac{29}{104}$ اور $لاد = \frac{1}{52}$ اسی معلوم ہوا کہ رقمین $\frac{2}{13}$ اور $\frac{1}{8}$ ہین ایسے سلسلہ دریافت ہو جایگا

(۱۳) فرضکرو کہ دو عدد ا اور ب ہین تو $ح_1 = ا + \frac{ب-ا}{3}$ اور $ح_2 = ا + \frac{2(ب-ا)}{3}$
اور $\frac{1}{ہ_1} = \frac{1}{ا} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{ب} - \frac{1}{ا}\right)$ اور $\frac{1}{ہ_2} = \frac{1}{ا} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{ب} - \frac{1}{ا}\right)$ پس
$ح_1 = \frac{2ا+ب}{3}$ اور $ح_2 = \frac{2ب+ا}{3}$ اور ان کے درمیان اوسط موسیقیہ
$\frac{2}{3}\frac{(2ا+ب)(2ب+ا)}{(2ا+ب+2ب+ا)}$ یعنی $\frac{2(2ا+ب)(2ب+ا)}{9(ا+ب)}$ اور نیز
$ہ_1 = \frac{3اب}{2ب+ا}$ اور $ہ_2 = \frac{3اب}{2ا+ب}$ اور ان کے درمیان اوسط حسابیہ

$\frac{9ا ب(ا+ب)}{2(2ا+ب)(2ب+ا)}$ پس $\frac{2(2ا+ب)(2ب+ا)}{9(ا+ب)} \times \frac{9ا ب(ا+ب)}{2(2ا+ب)(ب+2ا)} = ا ب$

(۱۴) $\frac{لا+ر}{2} = ح$ اور $\sqrt{لار} = ص$ اور $\frac{2لار}{لا+ر} = م$ پس $ص^2 = ح م$ اسواسطے

$(ح-ا)^2 = ح(ح-ا)$ اسواسطے $ح = \frac{ا^2}{2ا-ب}$ اور $م = ح - ب$

$= \frac{(ب-ا)^2}{2ا-ب}$ اور $م = \frac{ا(ب-ا)}{2ا-ب}$ پس لا اور ر کی قیمتیں دو اول مساواتوں سے

ارقام ا اور ب میں اس سبب سے دریافت ہو جائیگی کہ ح اور م ارقام ا اور ب میں معلوم ہیں

(۱۵) $ب = \frac{ا+ح}{2}$ اور $ص = \frac{2سر}{س+ر}$ اور $ب\,ص = اح = سر$

اول اور دوم مساوات سے قیمتیں نکال کر تیسری مساوات میں درج کرو تو $\frac{2سر}{(س+ر)^2} = \frac{2اح}{(ا+ح)^2}$

اسواسطے بموجب دفعہ ۲۹۵ $\frac{س^2+ر^2}{2سر} = \frac{ا^2+ح^2}{2اح}$ اسواسطے $\frac{س^2+ر^2}{سر} = \frac{ا^2+ح^2}{اح}$

(۱۶) $ب = \frac{2اح}{ا+ح}$ اور $ا-ب = \frac{ا^2-اح}{ا+ح}$ اور $ب-ح = \frac{اح-ح^2}{ا+ح}$

$\frac{1}{ا-ب} + \frac{1}{ب-ح} + \frac{2}{ا-ح} = \frac{1}{ح-ا}\left[4 - \frac{ا+ح}{ا} - \frac{ا+ح}{ح}\right]$

$= \frac{1}{ح-ا}\left(2 - \frac{ح}{ا} - \frac{ا}{ح}\right) = -\frac{(ا-ح)^2}{(ا-ح)اح} = \frac{ح-ا}{اح}$

(۱۷) یہ ہم کو معلوم ہے کہ $ب = \frac{2اح}{ا+ح}$ اور یہ ہم کو ثابت کرنا ہے کہ

$\frac{ب}{ح+ا} =$ دائیں طرف کا جملہ $= \frac{\frac{2اح}{(ب+ح)(ا+ب)}}{\frac{ح}{ا+ب} + \frac{ا}{ب+ح}}$

$= \frac{2اح}{ا(ا+ب)+ح(ب+ح)} = \frac{2اح}{ب(ا+ح)+ا^2+ح^2} = \frac{2اح}{2اح+ا^2+ح^2} = \frac{2اح}{(ا+ح)^2}$

$= \frac{ب}{ح+ا}$

(۱۸) فرض کرو رویں اوسط حسابیہ کو ح اور رویں اوسط موسیقیہ کو ہر تعبیر کرتا ہے

تو $ح = ا + \frac{ر}{ن+1}(ب-ا)$ اور $\frac{1}{ہر} = \frac{1}{ا} + \frac{ر}{ن+1}\left(\frac{1}{ب} - \frac{1}{ا}\right)$

اسواسطے $\frac{ح}{ہر} = 1 + \frac{ر}{ن+1}\left(\frac{ا}{ا} - \frac{ا}{ب} + \frac{ب-ا}{ا}\right) + \frac{ر^2}{(ن+1)^2}(ب-ا)\left(\frac{1}{ب} - \frac{1}{ا}\right)$

= ۱ + ر (ب - ا)^٢ / ا ب (ن + ۱) - ر^٢ (ب - ا)^٢ / (ن + ۱)^٢ ا ب پس اب اس جملہ مین ر کی قیمت سے
۱ سے لیکر ن تک صحیح اعداد مقرر کرین تو ایک سلسلہ حاصل ہوگا جسکی جمع ہم کو
دریافت کرنی منظور ہے اور وہ سلسلہ یہہ ہے کہ

ن + (ب - ا)^٢ / ا ب (ن + ۱) × ن (ن + ۱) / ٢ - (ب - ا)^٢ / (ن + ۱)^٢ ا ب × ن (ن + ۱) (٢ ن + ۱) / ٦

یعنی ن [۱ + (ب - ا)^٢ / ٢ ا ب - (ب - ا)^٢ / ٦ ا ب (ن + ۱) (٢ ن + ۱)] یعنی ن [۱ + (ن + ٢) / (ن + ۱) (ا - ب)^٢ / ٦ ا ب]

(۱۹) فرضکرو کہ لا اور د اور ی تین عدد ہین تو لا + د + ی = ۳ ا^٢ - ب^٢
اور لا^٢ + د^٢ + ی^٢ = ۳ ا^٤ + ب^٤ اور د = ٢ لا ی / (لا + ی) اول مساوات کا مجذور کرو
اور دوم کو اوس سے تفریق تو ٢ لا د + ٢ لا ی + ٢ د ی = ٦ ا^٤ - ٦ ا^٢ ب^٢
قیمت د کی مندرج کرو تو ٦ لا ی = ٦ ا^٤ - ٦ ا^٢ ب^٢ اسواسطے لا ی = ا^٤ - ا^٢ ب^٢
اب اول اور دوم مساوات سے د کو دور کرو تو لا^٢ + ی^٢ + (۳ ا^٢ - ب^٢ - لا - ی)^٢ = ۳ ا^٤ + ب^٤
اسواسطے ٢ (لا + ی)^٢ - ٢ (۳ ا^٢ - ب^٢) (لا + ی) + (۳ ا^٢ - ب^٢)^٢ = ۳ ا^٤ + ب^٤ + ٢ (ا^٤ - ا^٢ ب^٢)
اسواسطے (لا + ی)^٢ - (۳ ا^٢ - ب^٢) (لا + ی) = - ٢ ا^٤ + ٢ ا^٢ ب^٢
اسواسطے (لا + ی - (۳ ا^٢ - ب^٢) / ٢)^٢ = ((۳ ا^٢ - ب^٢) / ٢)^٢ - ٢ ا^٤ + ٢ ا^٢ ب^٢ = ((ا^٢ + ب^٢) / ٢)^٢
اس سے معلوم ہوا کہ لا + ی = ٢ ا^٢ یعنی ا^٢ - ب^٢ پس اول قیمت کام کی ہے اور اوس سے یہہ حاصل ہوتا ہے
د = ا^٢ - ب^٢ اور لا = ا^٢ ± ا ب اور ی = ا^٢ ∓ ا ب

(۲۰) اول ہم یہہ ثابت کرتے ہین کہ اگر حاصل ضرب (ن - ۱) رقموں کا کل رقموں
کے حاصل ضرب پر تقسیم کیا جاے تو خارج قسمت مجموعہ اون ارقام کے متکافیوں کا ہوگا
مثلاً فرض کرو کہ چار رقمین ع و ق و ر و ص ہین تو حاصل جمع تین تین رقموں کے حاصل ضرب کا
= ق ر ص + ع ر ص + ع ق ص + ع ق ر = (۱/ع + ۱/ق + ۱/ر + ۱/ص) ع ق ر ص
پس اگر ہر یک تین رقموں کی حاصل ضرب کو چار رقموں کے حاصل ضرب پر تقسیم کرین تو ہم
۱/ع + ۱/ق + ۱/ر + ۱/ص حاصل ہوگا - اسی معلوم ہوا کہ اس مثال مین ارقام موسیقیہ کے

ر ہے تو س = ب + ر/(ن+۱) (ا-ب) اور ۱/ر = ۱/ا + ر/(ن+۱) (۱/ب - ۱/ا)

اسواسطے ر = (ن+۱) اب / ((ن+۱-ر) ب + را) اسواسطے ر س = اب اسسے معلوم ہوا کہ مجموعہ

اوساط متناظرہ کی حاصل ضرب کا = ن اب اور اول دو رقموں کے حاصل ضرب سے بھی اب

حاصل ہوتا ہے اور آخر دو رقموں کے حاصل ضرب سے اب حاصل ہوتا ہے اسلئے سلسلہ کا کل مجموعہ

(ن+۲) اب ہے

(۶) فرضکرو کہ اول اوسط موسیقیہ کو لا اور آخر اوسط موسیقیہ کو ی تعبیر کرتا ہے تو

۱/لا = ۱/ا + ۱/(ن+۱) (۱/ب - ۱/ا) اور ۱/ی = ۱/ا + ن/(ن+۱) (۱/ب - ۱/ا) پس

لا = (ن+۱) اب / (ن ب + ا) اور ی = (ن+۱) اب / (ب + ن ا) فرضکرو کہ ا کم بہ نسبت ب کے ہے تو لا کم ی سے ہر

اور ی - لا = (ن+۱) اب (ن-۱) (ب - ا) / ((ن ب + ا) (ن ا + ب)) تو ہم کو یہہ ثابت کرنا ہے کہ

(ن+۱) اب (ن-۱) / ((ن ب + ا) (ن ا + ب)) چھوٹا ہے بہ نسبت (ن-۱)/(ن+۱) یعنی (ن+۱)^۲ اب چھوٹا ہے بہ نسبت (ن ب + ا) (ن ا + ب)

یعنی (ن^۲ + ۲ن + ۱) اب چھوٹا ہے بہ نسبت (ن^۲ + ۱) اب + ن (ا^۲ + ب^۲) یعنی ۲ اب چھوٹا ہے بہ نسبت ا^۲ + ب^۲ کے

اور یہہ ظاہر ہے

(۷) فرضکرو کہ زید لا دن چل چکا تہا کہ بکر نے اوسکو پکڑ لیا تو زید نے لا/۲ (۲ + (لا-۱)) میل

مسافت طی کی اور بکر نے ۱۲ (لا-۵) میل اسواسطے لا/۲ (لا+۱) = ۱۲ (لا-۵)

یعنی لا^۲ - ۲۳ لا + ۱۲۰ = ۰ اسلئے مساوات درجہ دوم کی قیمت ۸ اور ۱۵ ہین

اسسے معلوم ہوا کہ ۸ دن مین زید کو بکر پکڑ لیگا - اور اگر یہہ پہلے قاعدہ کے موافق وہ چلینگے

تو سات دن بعد پہر زید کو بکر پکڑ لیگا

(۸) فرضکرو کہ لا بوتلین ہر دفعہ نکالی گئین تو اول دفعہ نکالنے کے بعد ۲۵۶ - لا بوتلین عرق کی

باقی رہین یعنے ۲۵۶ (۲۵۶ - لا)/۲۵۶ بوتلین اب دوسرے دفعہ مین اگر ۲۵۶ بوتلین نکالین

تو ۲۵۶ - لا بوتلیں عرق کی ہوئین اب ہم نے اوسمین لا بوتلین نکالی ہین

اسلئے لا (۲۵۶ - لا)/۲۵۶ بوتلین عرق کی نکلین اسلئے اوسمین ۲۵۶ - لا - لا (۲۵۶ - لا)/۲۵۶

یعنی $\frac{۲۵۶(۲۵۶-\text{لا})-(۲۵۶-\text{لا})}{۲۵۶} = ۲۵۶\left(\frac{۲۵۶-\text{لا}}{۲۵۶}\right)^{۲}$ عرق باقی رہا۔

اسی طرح عمل کرنے سے چوتھی مرتبہ مین $۲۵۶\left(\frac{۲۵۶-\text{لا}}{۲۵۶}\right)^{۴}$ عرق باقی رہیگا اسواسطے

$۲۵۶\left(\frac{۲۵۶-\text{لا}}{۲۵۶}\right)^{۴} = ۸۱$ پس $\frac{۲۵۶-\text{لا}}{۲۵۶} = \left(\frac{۸۱}{۲۵۶}\right)^{\frac{۱}{۴}} = \frac{۳}{۴}$ اسواسطے لا = ۶۴

(۹) فرض کرو کہ موہن پاس لا روپیہ اور سوہن پاس ی روپیہ تہا اور موہن $\frac{\text{م}}{\text{لا}}$ اور سوہن $\frac{\text{م}}{\text{ی}}$ روپیہ باری مین لگاتے ہین تو

$\frac{\text{م}}{\text{لا}} + \frac{\text{م}}{\text{ی}} = ۹۰$ اور $\text{لا} + \frac{\text{م}}{\text{ی}} = ۵\left(\text{ی} - \frac{\text{م}}{\text{ی}}\right)$ اور $\text{ی} + \frac{\text{م}}{\text{لا}} = ۲\left(\text{لا} - \frac{\text{م}}{\text{لا}}\right)$

دوسرے مساوات سے $۵\text{ی} - \text{لا} = \frac{۶\text{م}}{\text{ی}}$ اور تیسرے مساوات سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ $۲\text{لا} - \text{ی} = \frac{۳\text{م}}{\text{لا}}$

جمع کرنے سے $۵\text{ی} - \text{لا} + ۴\text{لا} - ۲\text{ی} = \frac{۶\text{م}}{\text{لا}} + \frac{۶\text{م}}{\text{ی}} = ۵۴۰$ پس لا + ی = ۱۸۰ اسکو

اول مساوات سے ملاؤ تو $\text{م} = \frac{\text{لا ی}}{۲}$ حاصل ہوگا اس م کے قیمت کو دوسرے مساوات مین رکہو

تو لا = ۱۰۰ اور ی = ۸۰ کے حاصل ہوگا

(۱۰) $\frac{\text{ا}+\text{ب}+\text{ج}}{\text{ج}+\text{د}+\text{ا}} = \frac{\text{ج}+\text{د}+\text{ب}}{\text{ا}+\text{ب}+\text{د}}$ اسواسطے بموجب دفعہ ۲۹۴ کے $\frac{\text{ب}-\text{د}}{\text{ج}+\text{د}+\text{ا}} = \frac{\text{ج}-\text{د}}{\text{ا}+\text{ب}+\text{د}}$

اسواسطے $\frac{\text{ب}-\text{د}}{\text{ج}-\text{ا}} = \frac{\text{ج}+\text{د}+\text{ا}}{\text{ا}+\text{ب}+\text{د}}$ اسواسطے $\frac{\text{ا}+\text{ب}-\text{ج}-\text{د}}{\text{ج}-\text{ا}} = \frac{\text{ج}-\text{ب}}{\text{ا}+\text{ب}+\text{د}}$ اسواسطے

$\text{ا}+\text{ب}+\text{د} = \frac{(\text{ج}-\text{ا})(\text{ب}-\text{ج})}{\text{ا}+\text{ب}-\text{ج}-\text{د}}$ اسی طرح ہم ثابت کرسکتی ہین کہ

$\text{ا}+\text{ب}+\text{ج} = \frac{(\text{ا}-\text{د})(\text{ب}-\text{د})}{\text{ا}+\text{ب}-\text{ج}-\text{د}}$ اسواسطے

$(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})(\text{ا}+\text{ب}+\text{د}) = \frac{(\text{ا}-\text{ج})(\text{ب}-\text{ج})(\text{ا}-\text{د})(\text{ب}-\text{د})}{(\text{ا}+\text{ب}-\text{ج}-\text{د})^{۲}}$

(۱۱) مساوات $\text{ا لا}^{۲} + ۲\text{ب لا} + \text{ج} = ۰$ کی قیمتین تاکہ مختلف اور ممکن ہون ضرور ہے کہ $\text{ب}^{۲} - \text{اج}$

مثبت ہو اور دوسرے مساوات یہہ ہے کہ

$(\text{ا}^{۲} - \text{اج} + ۲\text{ب}^{۲})\,\text{لا}^{۲} + ۲\text{ب}(\text{ا}+\text{ج})\,\text{لا} + \text{ج}^{۲} - \text{اج} + ۲\text{ب}^{۲} = ۰$

اب اس مساوات کے مختلف اور ممکن قیمتوں کے ہونے کی لئے ضرور ہے کہ $\text{ب}^{۲}(\text{ا}+\text{ج})^{۲} - (\text{ج}^{۲} - \text{اج} + ۲\text{ب}^{۲})(\text{ا}^{۲} - \text{اج} + ۲\text{ب}^{۲})$

مثبت ہو اب اس دوسرے جملہ کے تحویل اس صورت $= (\text{ب}^{۲} - \text{اج})\left[۴\text{ب}^{۲} + (\text{ا}-\text{ج})^{۲}\right]$ مین ہوسکتی ہے

جس کے علامت مستفاد علامت ب۲ - ا ح کی ہے اسی ثابت ہوا کہ اگر دونو مساواتوں میں سے ایک مساوات کی قیمتیں ممکن اور مختلف ہوں تو دوسرے مساوات کی قیمتیں ناممکن ہونگیں

(۱۲) ا + ب = - ح اور لا + ی = - (ی + د) اسواسطے (ا + ب) (لا + ی) = ح ی + ح د

اسواسطے ا لا + ب ی - ح ی = ح د - ا ی - ب لا ۰۰ (۱) اب √ا لا + √ب ی = - √ح ی کا مجذور کرو تو ا لا + ب ی + ۲ √ا ب لا ی = ح ی ۰۰ (۲) اب مساوات (۱) کے توسط سے (۲) مساوات کو اس صورت میں تبدیل کر سکتے ہیں کہ ح د - ا ی - ب لا + ۲ √ا ب لا ی = ۰

اسواسطے √ح د = √ا ی - √ب لا یعنی √(ب لا) - √(ا ی) + √(ح د) = ۰ پس ہم نے مساوات دوم کو مساوات اول سے استخراج کر لیا اور اسی طرح سے مساوات اول کو مساوات دوم سے استنباط کر سکتے ہیں

چونتیسواں باب

(۱) ۸! / (۳! ۳! ۲!) = ۵۶۰   (۲) ۱۰! / (۲! ۲! ۲!) = ۴۵۳۶۰۰

(۳) ۱۴! / (۲! ۲! ۲! ۲! ۳! ۳!) = ۴۵۴۰۵۳۶۰۰   (۴) ۱۱! / (۴! ۴! ۲!) = ۳۴۶۵۰

(۵) ن (ن - ۱) (ن - ۲) (ن - ۳) = ۱۲ ن (ن - ۱) اسواسطے (ن - ۲) (ن - ۳) = ۱۲ اس مساوات کے قیمت ۶ ہماری مطلب کی ہے

(۶) دس پانسوں میں سے ہر ایک دو پانسوں سے دو چھکی پھینک سکتی ہیں اسلئی یہہ دو چھکی $\frac{۱۰\times۹}{۱\times۲}$ طور سے پھینک سکتی ہیں

اب باقی اٹھہ پانسوں میں سے تین پانسوں سے تین پنجی پھینک سکتی ہیں اسلئی تین پنجی $\frac{۸\times۷\times۶}{۱\times۲\times۳}$ طور سے

اب باقی پانچ پانسوں سے دو دوئی پھینک سکتی ہیں اسلئی پانچ دوئی $\frac{۵\times۴\times۳\times۲\times۱}{۱\times۲\times۳\times۴\times۵}$ طور سے پھینک سکتے ہیں

اسلئی سب کل طرح پانسوں کی پھینکنی کی $\frac{۱۰\times۹}{۱\times۲} \times \frac{۸\times۷\times۶}{۱\times۲\times۳} \times \frac{۵\times۴\times۳\times۲\times۱}{۱\times۲\times۳\times۴\times۵}$

(۷) تین ٹکے کے امرود اٹھارہ آئینگے پس اب سوال یہہ ہے کہ ۲۰ چیزوں میں سے ۱۸ چیزوں کا اجتماع کیا ہوگا اور بموجب دفعہ ۲۹۵ کے ان اجتماعوں کی تعداد وہی ہوگی جو دو دو اشیا کی یعنی $\frac{۲۰\times۱۹}{۱\times۲}$ اور جب ایک خاص امرود ہر دفعہ منتخب کیا جاتا ہے تو باقی ۱۹ امرودوں میں سے ہر ایک سترہ آتے ہونگے

پس $\frac{19 \times 18}{2 \times 1}$ طور سے جمعین ایک خاص امرود ہر ایک دفعہ اسکتا ہے

(۸) جب ایک خاص آدمی ہر دفعہ انتخاب کیا جاے تو ہم کو ۹ سپاہی ۹۵ سپاہیوں میں سے منتخب کرنے ہیں

اور یہہ انتخاب $\frac{\lfloor 95}{\lfloor 9 \, \lfloor 85}$ اور جب انتخاب میں سے خاص آدمی خارج کیا جاے تو ہم کو ۱۰ آدمی ۹۵ میں سے

منتخب کرنے ہیں اسلیے وہ $\frac{\lfloor 95}{\lfloor 10 \, \lfloor 85}$

(۱۰) بموجب دفعہ ۴۹۵ کے جن اجتماعوں کی تعداد برابر ہے وہ ایک دوسرے کے متمم ہونگے اسلیے ر − ر + ر + ر = ن

(۱۱) جبر مقابلہ میں بارہویں مثال کا حل جوابوں میں دیکھو

(۱۲) سوال کی اول حصہ کا جواب یہہ ہے کہ ۱۹ اشیا میں سے کل اشیا کی کل ترتیبیں لیجائیں تو وہ $\lfloor 9$ ہونگیں

اور دوسرے حصہ کا جواب یہہ ہے کہ وہ $\lfloor 10$ ہونگیں بشرطیکہ اس بات کو مان لیں کہ صفر بائیں طرف بھی واقع ہو

لیکن اگر اسکو روا نہ رکھیں کہ صفر بائیں طرف واقع ہو تو وہ سب صورتیں نکال ڈالنی چاہیں جنمیں ایسا ہوا اور وہ

سب صورتیں بموجب حصہ اول سوال کے $\lfloor 9$ ہیں یعنی $\lfloor 10 - \lfloor 9$

(۱۴) اب تین مسلمانوں کی جماعتیں ہم $\frac{\lfloor 12}{\lfloor 3 \, \lfloor 9}$ طور سے بنا سکتے ہیں اور ہندوؤں کے جماعتیں $\frac{\lfloor 16}{\lfloor 4 \, \lfloor 12}$

اور ان دونو ماحصل کا حاصل ضرب تعداد مطلوب ہے

(۱۶) جن اجتماعوں کی تعداد برابر ہے وہ ایک دوسرے کے متمم ہیں اسلیے ر + ر + ۱ = ن

اور $\frac{\lfloor ن}{\lfloor ر \, \lfloor ر+1} = \frac{5}{4} \frac{\lfloor ن}{\lfloor ر-1 \, \lfloor ر+2}$ اسواسطے $\frac{ر+2}{ر} = \frac{5}{4}$ اسواسطے ر = ۸

(۱۷) م اشیا میں سے ہم کو $\frac{\lfloor م}{\lfloor ر \, \lfloor م-ر}$ اجتماع ر اشیا کے حاصل ہونگے اور ن چیزوں میں سے ہم کو

$\frac{\lfloor ن}{\lfloor ص \, \lfloor ن-ص}$ اجتماع ص اشیا کے ہونگے اور ص + ر اشیا کی ترتیبیں اگر وہ سب مختلف ہوں تو

$\lfloor ص+ر$ ہونگیں اسلیے تینوں کا حاصل ضرب جواب ہوگا

(۱۸) مجسم متوازی السطوح کے تین کنارے ہوتے ہیں اسلیے جواب اسکا یہہ ہوگا کہ ل اشیا میں تین تین

کے اجتماع کی تعداد مجسموں کی تعداد ہوگی

(۱۹) ۴ن اشیا میں سے ۲ن اشیا کے اجتماعوں کی تعداد $\frac{\lfloor 4ن}{\lfloor 2ن \, \lfloor 2ن}$ ہے اور ۲ن اشیا میں سے ن اشیا کے

اجتماعوں کی تعداد $\frac{\lfloor 2ن}{\lfloor ن \, \lfloor ن}$ اسلیے نسبت مطلوب = $\frac{\lfloor 4ن \, \lfloor ن \, \lfloor ن}{\lfloor 2ن \, \lfloor 2ن \, \lfloor 2ن}$ ا ب

پس ہر ایک گروہ چار آدمیون کا ۴! طور سے ترتیب پاسکتا ہے پس کل ترتیبین ۳ × ۴! × ۴! ہوئین جنکے موافق ملاحون کا گروہ مرتب ہوسکتا ہے

(۲۷) اول سوئی ن مختلف مقامون پر رکھی جاسکتی ہے اور اسیطرح سے دوسری سوئی ن مختلف مقامون پر رکھی جاسکتی ہین پس ان دو سوئیون سے ن^۲ اشارے ہوسکتے ہین اب تیسری سوئی لو تو اسکا ہر ایک مقام اول اور دوسری سوئی مقامات کے ساتھہ اجتماع پاسکتا ہے اسلئے ن^۲ × ن یعنی ن^۳ ان تینون سوئیون سے اشارے ہوسکتے ہین علے ہذا القیاس کل م^ن اشارے ہونگے

(۲۸) ایک بازی تو (۵۲ × ۵۱ × ... × ۴۰) / ۱۳! طور سے لگی اگے اب باقی ۳۹ مین سے ایک بازی (۳۹ × ۳۸ × ... × ۲۷) / ۱۳! طورون سے لگیگی — اور علی ہذا القیاس پس کل بازیان ۵۲! / (۱۳!)^۴ طور سے لگینگے

(۲۹) (۱۰ × ۹ × ۸) / (۱ × ۲ × ۳)

(۳۰) ن - ع نقطون مین سے کوئی سا زوج نقطون کا لو تو (ن - ع)(ن - ع - ۱) / (۱ × ۲) خطوط مستقیم ہونگے اور ن - ع نقطون مین سے کوئی نقطہ اور ع نقطون مین سے کوئی نقطہ لو تو (ن - ع) ع خطوط مستقیم ہونگے اور ع نقطے ایک خط مستقیم مین ہین اسلئے کل تعداد (ن - ع)(ن - ع - ۱) / (۱ × ۲) + (ن - ع) ع + ۱ یا اسطرح عمل کرو کہ اگر کوئی تین نقطے ایک خط مستقیم مین نہ ہون تو ن (ن - ۱) / (۱ × ۲) خطوط مستقیم کی تعداد ہوگی اب اگر ع نقطے ایک خط مستقیم مین اجائین تو بجای ع (ع - ۱) / (۱ × ۲) خطوط مستقیم کے جو ع نقطون سے پیدا ہوتی تہی ایک خط مستقیم ہو حاصل ہوگا اسلئے حاصل ن (ن - ۱) / (۱ × ۲) - ع (ع - ۱) / (۱ × ۲) + ۱ ہوگا یہہ اور پہلے صورت دونو ایک ہی ہین

(۳۱) ن - ع نقطون مین سے کوئی سے تین نقطے لو تو (ن - ع)(ن - ع - ۱)(ن - ع - ۲) / ۳! مثلث پیدا ہونگی — ن - ع نقطون مین سے دو نقطے لو اور ع نقطون مین سے ایک نقطہ لو تو ع (ن - ع)(ن - ع - ۱) / (۱ × ۲) مثلث پیدا ہونگی اور اب ن - ع نقطون مین سے ایک نقطہ اور ع نقطون مین دو نقطے لو تو ع (ع - ۱)(ع - ۲) / (۱ × ۲) مثلث پیدا ہونگی پس ان تینون جملون کا مجموعہ کل مثلثون کی تعداد ہے — یا اسطرح عمل کرو کہ اگر کوئی تین نقطے ایک خط مستقیم مین نہ

تو کل مثلثون کی تعداد $\frac{ن(ن-1)(ن-2)}{\lfloor 3}$ ہوئی اب اگر اسمین سے ع نقطے ایک خط مستقیم مین ہو جائین تو $\frac{ع(ع-1)(ع-2)}{\lfloor 3}$ مثلث جو ع نقطون سے حاصل ہوتے تھے کم ہو جائینگے

اسلئے کل مثلثون کی تعداد $\frac{ن(ن-1)(ن-2)}{\lfloor 3} - \frac{ع(ع-1)(ع-2)}{\lfloor 3}$ ہوگی

یہہ حاصل اور پہلا حاصل اپسمین مطابقت رکھتے ہین

(۳۲) ۳۱ مثال کی طرح اگر اول طور پر عمل کرین تو یہہ نتیجہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{(ن-ع)(ن-ع-1)(ن-ع-2)}{\lfloor 3} + \frac{ع(ن-ع)(ن-ع-1)}{2\times1} + \frac{ع(ع-1)(ع-2)}{2\times1} + 1$$

اور اگر دوسرے طرح عمل کرین تو یہی نتیجہ اس صورت مین حاصل ہوگا کہ

$$\frac{ن(ن-1)(ن-2)}{\lfloor 3} - \frac{ع(ع-1)(ع-2)}{\lfloor 3} + 1$$

(۳۳) اب خطوط مستقیم کی تعداد $\frac{ن(ن-1)}{1\times2}$ ہے اسکی جگہ ف رکھو اب ف خطوط مستقیم سے نقاط تقاطع $\frac{ف(ف-1)}{1\times2}$ پیدا ہونگے لیکن اس سبب سے ن-۱ خطوط مستقیم ان اصلی نقطون کے ہر ایک نقطہ پر گذرتی ہے $\frac{ن(ن-1)(ن-2)}{1\times2}$ نقاط تقاطع ان ن نقطون پر منطبق ہوتے ہین پس ان کو خارج کرو تو $\frac{ف(ف-1)}{1\times2} - \frac{ن(ن-1)(ن-2)}{1\times2}$ نقاط تقاطع ہونگی یعنے

$$\frac{1}{2}\,\frac{ن(ن-1)}{1\times2}\left[\frac{ن(ن-1)}{1\times2}-1\right] - \frac{ن(ن-1)(ن-2)}{1\times2}$$ نقاط تقاطع ہونگی

اسکی تحویل اور اختصار سے $\frac{ن(ن-1)(ن-2)(ن-3)}{8}$ حاصل ہوتا ہے

(۳۴) یہہ ایک مثال دفعہ ۲۹ کی ہے اسواسطے جب ایک دوسرے کشتی اول کشتی کے اوپر نہین سکتی تو اونمین اپسمین ترتیبین نہین پیدا ہوتی ہین اوسکا حال ایسا ہے جیسے کہ ایک سے حرفون کا ہے اسلئے تعداد اونکے $\frac{\lfloor 24}{\lfloor 3\,\lfloor 3\,\lfloor 2\,\lfloor 2\,\lfloor 2\,\lfloor 2\,\lfloor 2\,\lfloor 2}$

(۳۵) یہہ سمجھو کہ ۲۰ کتابون کے سات جلدین جدا جدا ہین

(۳۶) اول صورت ایک صورت ایسی ہوسکتی ہے کہ اوسمین کوئی حرف مکرر نہ آئی دوم پانچ صورتین

ایسی ہو سکتی ہین کہ جنمین ب دو دفعہ آئی اور ایسی صورتین جنمین ج دو دفعہ آئی اور اتنی صورتین جنمین د دو دفعہ آئے
پس کل پندرہ ہوئین — سوم ۱۰ صورتین ایسی ہین جنمین ا تین دفعہ آئی چہارم ۴ صورتین ایسی ہین کہ جنمین
پ اور تین سے ہر ایک دو دفعہ آئی اور اتنی صورتین ہین جنمین پ اور دو مین سے ہر ایک دو دفعہ آئی پس کل
صورتین اٹھارہ ہوئین پنجم چار صورتین ایسی ہین کہ جنمین ا تین دفعہ اور ب دو دفعہ آئی اور اتنی صورتین ہین جنمین
ا تین دفعہ اور ر دو دفعہ آئی کل ۸ صورتین ہوئین ششم ایک صورت ہی کہ جسمین پ دو دفعہ اور
ر دو دفعہ اور د دو دفعہ آئے پس ۱ + ۱۵ + ۱۰ + ۱۸ + ۸ + ۱ = ۵۳

(۳۸) اول ہمین مین ل۳/۲ل۳ ل۳/ ل۲ اجتماع ہونگے اور دوسرے مین ل۳/ل۲ ل۲ اور تیسرے مین
ل۴/ل۳ ل۱ علی ہذالقیاس ان سب کے حاصل ضرب سے کل اجتماعون کی تعداد معلوم ہوگی
اور ضرب مین اجزاے مشترک کے ساقط کرنے سے وہی حاصل ہوگا جو سوال مین لکھا ہے

(۳۹) اب کل تعداد اعداد ل۵ ہے اب ان ہندسون مین سے مثلا ۳ لو تو
ل۴ صورتونمین ۳ اکائی کے مرتبہ پر ہوگا اور اتنی صورتون مین دہائی کے مرتبہ پر اور
اتنی ہی صورتون مین سیکڑون کے مرتبے پر اور علی ہذالقیاس پس کل مجموعہ اعداد جو
۳ سے پیدا ہونگے ل۴ [۳ + ۳۰ + ۳۰۰ + ۳۰۰۰ + ۳۰۰۰۰]
یعنے ۳ × ل۴ × ۱۱۱۱۱ اسی طرح سے باقی چار اعداد کے ساتھہ عمل کرو
تو اخر کو حاصل = (۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵) ل۴ × ۱۱۱۱۱

(۴۰) اوپر کی مثال مین مجموعہ مین ایک جز ضربی ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ یعنی ہندسون کا مجموعہ ہے
اگر اور ہندسے ہونگے تو بہی اسکے مشابہ نتیجہ پیدا ہوگا

پینتیسوان باب

(۱۱) [ا + √(ا۲ − ۱)]^۶ − [ا − √(ا۲ − ۱)]^۶

= ۲ [ا^۶ + (۶ × ۵)/(۱ × ۲) ا^۴ (ا۲ − ۱) + (۶ × ۵ × ۴ × ۳)/(۱ × ۲ × ۳ × ۴) ا^۲ (ا۲ − ۱)^۲ + (ا۲ − ۱)^۳]

= ۲ [ا^۶ + ۱۵ ا^۴ (ا۲ − ۱) + ۱۵ ا^۲ (ا۲ − ۱)^۲ + (ا۲ − ۱)^۳] = وغیرہ

(۱۲) (ک/ؤ + ح/ک)^ہ = ((ک^۲ + ؤح)/ؤک)^ہ اس جملہ کی صورت مفصلہ مین جو ؤ^ہ کا سر ہے وہی ہے جو (ک^۲ + ؤح)^ہ مین ہے

(۱۳) (لا + ا)^ن = ط + ص اور (لا − ا)^ن = ط − ص اسواسطے ضرب دینے سے (لا^۲ − ا^۲)^ن = ط^۲ − ص^۲

(۱۴) سیدہی طرح سے عمل کرکے دعوی کو ثابت کرلو یا اسطرح عمل کرو کہ (۱ + لا)^{ن+۱} (۱ − لا) = (۱ + لا)^ن (۱ − لا^۲) اس سے یہہ نتیجہ نکلتا ہے کہ لا کے کسی قوت کے امثال جو داہنی طرف کی جملہ کی صورت مفصلہ مین ہونگی وہی بائین طرف کے جملہ کی صورت مفصلہ مین ہونگے اٹھائیسوان باب دیکھو اب صورت مفصلہ (۱ + لا)^{ن+۱} (۱ − لا) مین سر لا^{ر+۱} کا اسطرح حاصل ہوگا کہ (۱ + لا)^{ن+۱} کے صورت مفصلہ مین سے لا کے سر کو لا^{ر+۱} کے سر سے تفریق کرین اور اسی طرح لا (۱ + لا)^ن (۱ − لا^۲) کے صورت مفصلہ مین لا^{ر+۱} کا سر اسطرح حاصل ہوگا کہ (۱ + لا)^ن کے صورت مفصلہ مین لا^{ر+۱} کے سر کو لا^{ر−۱} کے سر مین سے تفریق کرین

(۱۵) رقم اوسط = [۲ن / ([ن [ن) لا^ن اور

[۲ن = ۱ × ۲ × ۳ × ۵ × ۰۰ (۲ن − ۱) × ۲ × ۴ ۰۰۰ ۲ن

= ۱ × ۳ × ۵ ۰۰ (۲ن − ۱) ۲^ن [ن

اسواسطے [۲ن / [ن = ۱ × ۳ × ۵ ۰۰ (۲ن − ۱) ۲^ن

(۱۶) فرض کرو کہ صورت مفصلہ (لا + ۲)^ن کی رو ین رقم ۲۹۱۶ ہے تو ۲۹۱۶ = [ن / ([ر − ۱ [ن − ر + ۱) لا^{ن−ر+۱} ا^{ر−۱}

اور اسواسطے ۴۸۶۰ = [ن / ([ر [ن − ر) لا^{ن−ر} ا^ر اب تقسیم کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

۴۸۶۰/۲۹۱۶ = (ن − ر + ۱)/ر ‧ ا/لا اور اسی طرح ۴۳۲۰/۴۸۶۰ = (ن − ر)/(ر + ۱) ‧ ا/لا اور

۲۱۶۰/۴۳۲۰ = (ن − ر − ۱)/(ر + ۲) ‧ ا/لا پس اختصار کرنے سے ۵/۳ = (ن − ر + ۱)/ر ‧ ا/لا

۸/۹ = (ن − ر)/(ر + ۱) ‧ ا/لا اور ۱/۲ = (ن − ر − ۱)/(ر + ۲) ‧ ا/لا ان مساواتون مین سے اول تین مساواتون کو ر مین ضرب دو اور دوسرے مساوات کو ر + ۱ مین اور تفریق کرو تو

$\frac{۵ر}{۳} - \frac{۸(ر+۱)}{۹} = \frac{۵}{لا}$ اور اسیطرح $\frac{۸(ر+۱)}{۹} - \frac{ر+۲}{۲} = \frac{۵}{لا}$ اسواسطے

$\frac{۵ر}{۳} - \frac{۸(ر+۱)}{۹} = \frac{۸(ر+۱)}{۹} - \frac{ر+۲}{۲}$ جسسے ر = ۲ پس $\frac{۵}{لا} = \frac{۵}{۳}$ اور

ق = ۶ اسسے معلوم ہوا کہ لا = $\frac{۳}{۲}$ اور ن = ۱۶ اور ر = ۲ اور اول مساوات میں

ا = ۲ کے معلوم ہوگا

(۱۷) $(لا + \frac{۱}{لا})^{ن} = \frac{(لا^۲ + ۱)^{ن}}{لا^{ن}}$ اب اس جملہ کے صورت مفصلہ مین لا کا سر جو ہوگا جو

$(لا^۲ + ۱)^{ن}$ کے صورت مفصلہ مین $لا^{ن+ر}$ کا سر ہے — ظاہر ہے کہ

$(لا^۲ + ۱)^{ن}$ کے صورت مفصلہ مین سب قوا لا کے جفت ہین اسلئے ضرور ہے کہ ن + ر جفت عدد ہو

اور $(لا^۲ + ۱)^{ن}$ کی صورت مفصلہ مین $لا^{ن+ر}$ کا وہی سر ہے جو $(ی + ۱)^{ن}$

کے صورت مفصلہ مین $ی^{\frac{ن+ر}{۲}}$ کا سر ہے اور یہہ سر $\frac{\lfloor ن}{\lfloor \frac{۱}{۲}(ن-ر) \lfloor \frac{۱}{۲}(ن+ر)}$ ہے

(۱۸) $لا^{ر+۱}$ کے وہی امثال ہین جو $(لا^۲ - ۱)^{۲ن+۱}$ کی صورت مفصلہ مین $لا^{۲ر+۲}$ یا $۲ن+۱$ کے امثال ہین

اور یہہ امثال وہی ہین جو $(ی - ۱)^{۲ن+۱}$ مین $ی^{ر+ن+۱}$ کے امثال ہین

(۱۹) $(لا^۲ - ۱)^{۲ن}$ کی رو سے رقم اول سی اور رو سے رقم آخری اور رقم متوسط دریافت کریں

اور $لا^{۲ن}$ پر تقسیم کردیں

(۲۰) چونکہ $(لا + ا\sqrt{-۱})(لا - ا\sqrt{-۱}) = لا^۲ + ا^۲$ اسسے یہہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$(لا + ا\sqrt{-۱})^{ن} (لا - ا\sqrt{-۱})^{ن} = (لا^۲ + ا^۲)^{ن}$$

اب $(لا + ا\sqrt{-۱})^{ن} = ط_۰ - ط_۲ + ط_۴ - \cdots + (ط_۱ - ط_۳ + ط_۵ \cdots)\sqrt{-۱}$

$(لا - ا\sqrt{-۱})^{ن} = ط_۰ - ط_۲ + ط_۴ - \cdots - (ط_۱ - ط_۳ + ط_۵ \cdots)\sqrt{-۱}$

اب بائین طرف کے دونو جملون کو اپسمین ضرب دو تو وہ حاصل ضرب

$(ط_۰ - ط_۲ + ط_۴ - \cdots)^۲ + (ط_۱ - ط_۳ + ط_۵ \cdots)^۲$ ہوگا

اور یہہ برابر ہوگا $(ا^۲ + لا^۲)^{ن}$ کے

چہبیسوان باب

(۱) $(1+x)^{\frac12} = 1 + \frac12 x + \frac{\frac12(1-\frac12)}{2}x^2 + \frac{\frac12(1-\frac12)(2-\frac12)}{3!}x^3 + \dots$

$= 1 + \frac12 x - \frac18 x^2 + \frac1{16} x^3 -$ وغیرہ

(۲) $(1+x)^{\frac14} = 1 + \frac14 x + \frac{\frac14(1-\frac14)}{2}x^2 + \frac{\frac14(1-\frac14)(2-\frac14)}{3!}x^3 \dots$

$= 1 + \frac14 x - \frac{3}{32}x^2 + \frac{7}{128}x^3 - \dots\dots$

(۳) $(1+x)^{\frac23} = 1 + \frac23 x + \frac{\frac23(1-\frac23)}{2}x^2 + \frac{\frac23(1-\frac23)(2-\frac23)}{3!}x^3 + \dots$

$= 1 + \frac23 x - \frac19 x^2 + \frac{4}{81}x^3 -$ وغیرہ

(۴) $(1+x)^{-\frac12} = 1 + x(-\frac12) + \frac{(-\frac12)(1-\frac12-)}{2}x^2 + \frac{(-\frac12)(1-\frac12-)(2-\frac12-)}{3!}x^3 + \dots$

$= 1 - \frac12 x + \frac38 x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots$

(۵) $(1+x)^{-\frac14} = 1 + x(-\frac14) + \frac{(-\frac14)(1-\frac14-)}{2\times1}x^2 + \frac{(-\frac14)(1-\frac14-)(2-\frac14-)}{3!}x^3 + \dots$

$= 1 - \frac14 x + \frac{5}{32}x^2 - \frac{15}{128}x^3 + \dots$

(۶) $(1+x)^{-\frac23} = 1 + x(-\frac23) + \frac{(-\frac23)(1-\frac23-)}{2\times1}x^2 + \frac{(-\frac23)(1-\frac23-)(2-\frac23-)}{3!}x^3 + \dots$

$= 1 - \frac23 x + \frac59 x^2 - \frac{40}{81}x^3 + \dots$

(۷) $(1-x)^{\frac15} = 1 - \frac15 x + \frac{\frac15(1-\frac15)}{2\times1}x^2 - \frac{\frac15(1-\frac15)(2-\frac15)}{3!}x^3 \dots$

$= 1 - \frac15 x - \frac{2}{25}x^2 - \frac{6}{125}x^3 - \dots$

(۸) $(1-2x)^{\frac34} = 1 - \frac34 (2x) + \frac{\frac34(1-\frac34)}{2\times1}(2x)^2 - \frac{\frac34(1-\frac34)(2-\frac34)}{3!}(2x)^3 \dots$

$= 1 - \frac32 x - \frac38 x^2 - \frac{5}{16}x^3 - \dots$

(۹) $(x^2 - y^2)^{\frac12} = y\left(\frac{x^2}{y^2} - 1\right)^{\frac12}$

$= y\left[-1 + \frac{x^2}{y^2}\cdot\frac12 - \frac{x^4}{y^4}\cdot\frac{\frac12(1-\frac12)}{2\times1} + \frac{x^6}{y^6}\cdot\frac{\frac12(1-\frac12)(2-\frac12)}{3!} + \dots\right]$

$= y\left[-1 - \frac{x^2}{y^2}\cdot\frac12 - \frac{x^4}{y^4}\cdot\frac18 - \frac{x^6}{y^6}\cdot\frac1{16} - \dots\right]$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+1\right)\left(\frac{1}{4}+2\right)\cdots\left(\frac{1}{4}+ر-1\right)\frac{لا^ر}{|ر}=\frac{1\times5\times9\cdots(4ر-3)}{4^ر\,|ر}لا^ر$$

(۲۱) $\sqrt[4]{24}=(25-1)^{\frac14}=5\left(1-\frac{1}{25}\right)^{\frac14}=5\left[1-\frac14\,\frac{1}{25}-\frac18\left(\frac{1}{25}\right)^2\cdots\right]$

(۲۲) $\sqrt[3]{999}=(1000-1)^{\frac13}=10\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{\frac13}$

$$=10\left[1-\frac13\,\frac{1}{1000}-\frac19\left(\frac{1}{1000}\right)^2\cdots\right]$$

(۲۳) $\sqrt[5]{31}=(32-1)^{\frac15}=2\left(1-\frac{1}{32}\right)^{\frac15}=2\left[1-\frac15\,\frac{1}{32}-\frac{2}{25}\left(\frac{1}{32}\right)^2\cdots\right]$

(۲۴) $\sqrt[5]{(99000)}=(1000000-1)^{\frac15}=10\left(1-\frac{1}{1000000}\right)^{\frac15}$

$$=10\left[1-\frac15\,\frac{1}{1000000}-\frac{2}{25}\left(\frac{1}{1000000}\right)^2\cdots\right]$$

(۲۵) $(1+لا)^{\frac12}=1+\frac12لا-\frac18لا^2\cdots$ اور $(1-لا)^{\frac12}=1-\frac12لا-\frac18لا^2-\frac{1}{16}لا^3\cdots$

پس جملہ $=\dfrac{1+\frac12لا-\frac18لا^2+\cdots+1-\frac12لا-\frac18لا^2+\cdots}{1+لا+1+\frac12لا-\frac18لا^2+\cdots}$

$$=\frac{2-\frac14لا^2-\frac{5}{64}لا^4+\cdots}{2+\frac32لا-\frac18لا^2+\cdots}=\frac{1-\frac18لا^2-\frac{5}{128}لا^4+\cdots}{1+\frac34لا-\frac{1}{16}لا^2+\cdots}$$

اب اگر شمار کنندہ کو نسب نما پر تقسیم کریں تو اول دو رقمیں خارج قسمت مین $1-\frac{3لا}{4}$ نکلینگے

(۲۶) ہم کو یہہ ثابت کرنا ہے کہ

$$\frac{ن}{1}+\frac{ن(ن-1)(ن-2)}{|3}+\frac{ن(ن-1)(ن-2)(ن-3)(ن-4)}{|5}+\cdots$$

زیادہ $\frac{ن(ن-1)}{1\times2}+\frac{ن(ن-1)(ن-2)(ن-3)}{|4}+\cdots$ سے بقدر واحد کے ہے

یعنے ہم کو یہہ ثابت کرنا ہے

$$ن-\frac{ن(ن-1)}{1\times2}+\frac{ن(ن-1)(ن-2)}{|3}-\frac{ن(ن-1)(ن-2)(ن-3)}{|4}+\cdots$$

برابر واحد کے ہے اور یہہ ظاہر ہے کیونکہ یہہ جملہ $=1-(1-1)^ن$

(۲۷) بموجب دفعہ ۲۳ کے تعداد $=\frac{ن(ن+1)\cdots(2ن-1)}{|ن}$ دونو نسب نما اور شمار کنندہ کو $|ن-1$ مین ضرب دو تو $\frac{|2ن-1}{|ن\;|ن-1}$

(۲۸) (ر+۱) وین رقم روین رقم کو $\left(\frac{ن+1}{ر}-1\right)$ لا مین ضرب دینے سے حاصل ہو سکتی ہے

یعنی اس صورت مین (۵/ر − ۱) ۲/۴ برابر ایک کے رکھنی سے ر = ۲ حاصل ہوتا ہے
پس دوسرے رقم برابر تیسری رقم کے ہی اور اونمین سے ہر ایک اور کسی رقم سے بڑہی ہے

(۲۹) (ر + ۱) وین رقم کی عددی قیمت روین رقم کو (ن − ۱۳/ر − ۱) لا مین ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے
یعنی اس صورت مین (۱۱/ر − ۱) ۱/۵ او. یہہ مضروب فیہ جب ر = ۳ کے ہو تو ا سے
چھوٹا ہوتا ہے پس تیسرے رقم سب سے بڑی ہوئی

(۳۰) اس صورت مین (ر + ۱) وین رقم کی عددی قیمت روین رقم کو (۶/ر + ۱) ۵/۶
مین ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہی اور برابر ا کے ہے جب ر = ۵ پس ۶ رقم برابر ہوئی
پانچوین رقم کے اور یہی بڑی رقمین اور رقمون سے ہوئین

(۳۱) اس صورت مین (ر + ۱) رقم کی عددی قیمت روین رقم کو (۵/۲ر + ۱) ۲/۱۱ مین ضرب دینے سے
حاصل ہو سکتی ہی اور یہہ مضروب فیہ جب ر = ۳ تو ایک سے کم ہوتا ہی تو اسی معلوم ہوا کہ تیسرے رقم سب سے بڑی ہے

(۳۲) (ن − ۱/ن)^۲ن−۱ = ن^۲ن+۱ (۱ − ۱/ن^۲)^۲ن+۱ پس ہم کو صورت مفصلہ
(۱ − ۱/ن^۲)^۲ن+۱ کی بڑی رقم دریافت کرنی ہی − اس صورت مین (ر + ۱) وین رقم کی
عددی قیمت روین رقم کو (۲ن + ۲/ر − ۱) ۱/ن^۲ مین ضرب دینے سے حاصل ہو سکتی ہے اگر
ن = ا تو یہہ جملہ برابر ا کے ہوتا ہے جب ر = ۲ کے ہو اگر ن = ۲ تو یہہ جملہ اول
ا سے کم ہوتا ہے جب ر = ۲ کے ہو اگر ن بڑا ۲ سے ہے تو جملہ ہمیشہ ا سے کم ہوتا ہے

(۳۳) بموجب دفعہ ۲۴۵ تعداد ارقام = ۱۳ × ... ۵ × ۴ / ۱۰ = ۱۳ × ۱۲ × ۱۱ / ۳

(۳۴) ہم کو یہہ دریافت کرنا چاہی کہ ۱۱/۳ر − ر + ۱ کب منفی اول ہی اول ہوگا −
ظاہر ہے کہ یہہ منفی جب ہوگا کہ ر = ۵ پس چھٹی رقم اول منفی رقم ا ہے

(۳۵) لا^ن (۱ − لا)^−۲ن کے صورت مفصلہ مین لا^ع کا سر وہی ہے جو لا^ع−ن کا سر (۱ − لا)^−۲ن کی
صورت مفصلہ مین ہے یعنی

$$\frac{۲ن (۲ن + ۱) \cdots (۲ن + ع − ن − ۱)}{|ع − ن}$$ ہے

اب دونو شمار کنندہ اور نسب نما کو (۲ن-۱) مین ضرب دو تو سر یہہ ہو جاویگا کہ $\frac{(ع+ن-1)}{(ع-ن)(2ن-1)}$ اور (ع-ن) کے ساقط کرنے سے سر کی یہہ صورت ہو گی کہ

$$\frac{(ع-ن+1)(ع-ن+2)\cdots(ع+ن-1)}{(2ن-1)}$$

اب شمار کنندہ کی اجزاء ضربی مین بیچ کے رقم ع ہے اور اوسکی اودہر اودہر ع+۱ اور ع-۱ مین اور اوسکا حاصل ضرب $ع^2-1$ ہے اور آگے اسی پر قیاس کرو

(۳۶) ہم کو $لا^{ن}$ کا سر اس جملہ

$(1-4لا+12لا^2-8لا^3)(1-2لا)^{-4}$ مین دریافت کرنا ہے

ظاہر ہے کہ $(1-2لا)^{-4}$ کے صورت مفصلہ مین لا کے قوا جفت ہونگی پس ہم $(1+12لا^2)(1-2لا)^{-4}$ ہیں لا کی جفت قوتین واقع ہونگین $لا^{ن}$ کا سر $(1-2لا)^{-4}$ مین $\frac{4\times5\times6\cdots(4+ن-1)}{ن}2^{ن}$

یعنی $\frac{(ن+1)(ن+2)(ن+3)}{3}2^{ن}$ اور $لا^{ن-2}$ کا سر $\frac{ن(ن+1)(ن+2)}{3}2^{ن-1}$ آخر کو ہم کو یہہ

$\frac{(ن+1)(ن+2)(ن+3)}{3}2^{ن}+\frac{12ن(ن+1)(ن+2)}{3}2^{ن-1}$

یعنی $\frac{(ن+1)(ن+2)(ن+3)}{2}2^{ن-1}$

(۳۷) ہم کو $لا^{ن}$ کا سر صورت مفصلہ $(1+2لا+لا^2)(1-لا)^{-4}$ مین دریافت کرنا ہے تو بموجب مثال ۳۶ کے یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{(ن+1)(ن+2)(ن+3)}{3}+\frac{2ن(ن+1)(ن+2)}{3}+\frac{(ن-1)ن(ن+1)}{3}$$

اور یہہ برابر ہے $\frac{ن+1}{3}(2ن^2+4ن+3)$

(۳۸) $\left(\frac{ا+لا}{ا-لا}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{ا+لا}{(ا^2-لا^2)^{\frac{1}{2}}}=(ا+لا)(ا^2-لا^2)^{-\frac{1}{2}}=(1+\frac{لا}{ا})(1-\frac{لا^2}{ا^2})^{-\frac{1}{2}}$

پس اب ہم کو $(1-\frac{لا^2}{ا^2})^{-\frac{1}{2}}$ کی تفصیل قوائے $\frac{لا}{ا}$ مین کرنی چاہیے اور ما حصل کو $1+\frac{لا}{ا}$ مین ضرب دینا چاہیے۔ اسسے معلوم ہوا کہ اصل جملہ مین $لا^{2ر}$ کے سر دریافت کرنے کے لئے $لا^{2ر}$ کا سر $(1-\frac{لا^2}{ا^2})^{-\frac{1}{2}}$ مین دریافت کرنا چاہیے اور $لا^{2ر+1}$ سر اصل جملہ مین

لیکن $(۱-لا)^{-۲} \times (۱-لا)^{۲} = (۱-لا)^{-۱} = ۱ + لا + لا^۲ + \cdots + لا^{ن+۱} + \cdots$

اسے یہہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ۲ [عن+۱ + ع۱ عن + ع۲ عن + ۔۔۔ + عن‑۱ عن‑۳ + عن عن+۱] = ۱

(۴۴) صورت مفصلہ $(۱-لا)^{-ن-۱}$ مین لا کا سر

$$= \frac{(ن+۱)(ن+۲) \cdots (ن+م)}{\lfloor م} = \frac{\lfloor ن+م}{\lfloor ن \lfloor م}$$

اور $(۱-لا)^{-م}$ مین بہی لا کا سر یہی ہوگا

(۴۵) $۱ + ۲لا + ۳لا^۲ + ۴لا^۳ + \cdots = (۱-لا)^{-۲}$

پس ہم کو لا کا سر صورت مفصلہ $(۱-لا)^{-۲ن}$ مین دریافت کرنا ہے اور یہہ

$$\frac{۲ن(۲ن-۱) \cdots (۲ن+ر-۱)}{\lfloor ر}$$ ہے

سینتیسوان باب

(۱) ق + ۲ر = ۳ اور ع + ق + ر = ۳ اب حل ان مساواتون کے یہہ ہین کہ ر = ۱ اور ق = ۱ اور ر = ۱ اور ق = ۲ اور ع = ۰

$$\frac{\lfloor ۳}{\lfloor ۲} + \lfloor ۳ = ۳ + ۳ = ۶$$

اینده ہم مساواتون کے حل کرنے مین جو قیمتین صفر ہونگین اونکو نہین لکہینگے

(۲) ق + ۲ر = ۵ اور ع + ق + ر = ۴

ر = ۲ اور ق = ۱ اور ع = ۱ اور ر = ۱ اور ق = ۲

$$\frac{\lfloor ۳}{\lfloor ۲}(-۱)^۱ + \frac{\lfloor ۳}{\lfloor ۲}(-۱)^۲ = -۱۲ - ۴ = -۱۶$$

(۳) ق + ۲ر + ۳ص = ۸ اور ع + ق + ر + ص = ۴

ص = ۲ اور ر = ۱ اور ع = ۱ اور ص = ۱ اور ق = ۲ اور ر = ۲ اور ق = ۱ اور ر = ۱

$$\frac{\lfloor ۴}{\lfloor ۲} ۳(-۴)^۲ + \frac{\lfloor ۴}{\lfloor ۲ \lfloor ۲} (-۲)^۲ (-۴) + \frac{\lfloor ۴}{\lfloor ۲}(-۲)^۲ ۳ (-۴) + \frac{\lfloor ۴}{\lfloor ۳} ۳^۳$$

$$= ۴ \times ۳^۲ \times ۴ + ۳ \times ۲^۲ + ۲^۵ \times ۳^۲ + ۳^۴ = ۱۹۰۵$$

(۴) ق + ۲ر + ۳ص + ۴ط + ۵ش = ۱۴ اور ع + ق + ر + ص + ط + ش = ۳

(۱۵) ۵+۲ ر=۴ اور ع+ق+۱=ن

ر=۲ اور ع=ن-۲ اور ر=۱ اور ق=۲ اور ع=ن-۳ اور ق=۴ اور ع=ن-۴

ن(ن-۱)/۲ + ن(ن-۱)(ن-۲)/۲ + ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)/۲۴ = (ن۴+۶ن۳-۱۳ن۲+۱۴ن)/۲۴

(۱۶) باسانی یہہ امر دریافت ہوسکتا ہی کہ ۱+۳لا+۵لا۲+۷لا۳+۹لا۴+ . .

=(۱+لا)(۱+۲لا+۳لا۲+۴لا۳+۵لا۴ . . .)=(۱+لا)(۱-لا)^-۲

سے معلوم ہوا کہ ہم لا کا سر (۱+۷)^۴ (۱-لا)^-۱۴ مین دریافت کرنا چاہتے ہین اب عامل کثیرہ جملہ ثنائیہ کے دو اجزا ضربی کو موافق مسئلہ جملہ ثنائیہ کے پہلا کر ضرب دین یا دستور کے موافق بسط کثیرہ

ق+۲ر+۳ص+۴ط=۴ اور ع+ق+ر+ص+ط=۷

ط=۱ اور ع=۶ اور ص=۱ اور ق=۱ اور ع=۵ اور ر=۲ اور ع=۵

اور ر=۱ اور ق=۲ اور ع=۴ اور ق=۴ اور ع=۳

۹ ۷/۶ + ۹ ۷/۵ × ۷ × ۳ + ۵ ۷/۵ . ۲ + ۷/۴ . ۳ × ۵ ۴ + ۷/۴ . ۳ ۴

حاصل ۴۰۳۰ ہے

(۱۷) ۱+لا+لا۲+لا۳+ . . =۱(۱-لا)^-۱ پس ہم کو لا کا سر (۱-لا)^-۲ مین دریافت کرنا ہے اور یہہ باسانی م+۱ معلوم ہوسکتا ہے اور اگر ہم دستور کے موافق عمل کرین تو ق+۲ر+۳ص+۴ط+۵ش . . =م اور ع+ق+ر+ . . =۲ اب یہہ باسانی سے ثابت ہوسکتا ہی کہ اگر م=۳ تو سر ۴ ہوگا اور اگر م=۴ تو سر ۵ ہوگا اور اگر م=۵ تو سر ۶ ہوگا اور علے ہذا القیاس

(۱۸) ق+۲ر=۸ اور ع+ق+ر=ن

ر=۴ اور ع=ن-۴ اور ر=۳ اور ق=۲ اور ع=ن-۵

ر=۲ اور ق=۴ اور ع=ن-۶ اور ر=۱ اور ق=۶ اور ع=ن-۷

ق=۸ اور ع=ن-۸ اسے نتیجہ مطلوب حاصل ہے

م $ا^{م-۱}$ + م(م-۱) $ا^{م-۲}$ + $\frac{م(م-۱)(م-۲)}{ل۳}$ ...

(۲۵) $\frac{ل۵}{ل۳} = ۲۰$

(۲۶) $\frac{ل۷}{ل۲\ ل۳\ ل۲} (-۱)^۲ (-۱)^۳ = -۲۱۰$

(۲۷) $\frac{ل۹}{ل۲\ ل۴\ ل۳} = ۱۲۶۰$

(۲۸) $\frac{ل۱۰}{ل۲\ ل۳\ ل۴} (-۲)^۲ (-۱)^۴ = ۱۲۶۰۰$

(۳۱) ہر سر $\frac{ل۱۰}{لع\ لق\ لر}$ کی صورت کا ہے جسمین ع + ق + ر = ۱۰ اب یہہ ظاہر ہے کہ کم از کم قیمت لع لق لر کی ۱×۱×۱×۲×۲×۲×۳×۳×۳×۴ ہے کیونکہ وہ اول کم از کم دس اجزاء ضربی سے بنائی گئی ہے جو داخل ہی ہو سکتی ہین اور یہہ اجزاء ضربی کم از کم اس وجہ سے ہین کہ صرف تین مقدارین ع اور ق اور ر ہین تین سے زیادہ واحد اور تین سے زیادہ دو اور تین سے زیادہ تین نہین لے سکتی ہین بس سب سے بڑا اسر $\frac{ل۱۰}{(ل۳)^۳ \times ۴}$ ہے

(۳۲) ہر ایک سر اس صورت کا $\frac{ل۱۴}{لع\ لق\ لر\ لص}$ ہے جسمین ع + ق + ر + ص = ۱۴ اب یہہ ظاہر ہے کہ کم از کم قیمت لع لق لر لص کی ۱×۱×۱×۱×۲×۲×۲×۲×۳×۳×۳×۳×۴×۴ ہے کیونکہ وہ چودہ اجزاء اول کم از کم اجزاء ضربی سے بنایا گیا ہے جو داخل ہو سکتی ہین اور انکی کم از کم ہونے کے یہہ وجہ ہے کہ ہم یہہ چار سے زیادہ واحد اور چار سے زیادہ دو اور چار سے زیادہ تین نہین لے سکتی پس سب سے بڑا اسر $\frac{ل۱۴}{(ل۳)^۴ \times ۴^۲}$ ہے

(۳۳) مثال ۳۱ اور ۳۲ پر قیاس کرکے اس مثال کو آسانی سے حل کر سکتے ہو

(۳۴) $ا + ا_۱ لا + ا_۲ لا^۲ + \cdots$ لکھو اور اسکے نیچے یہی سلسلہ لکھو اور ایسے دونوں کو ضرب دو اور حاصل کو ترتیب سے لکھو تو $لا^۲$ اور $لا^۳$ اور $لا^۴$ ... کی سرون کو ہم امتحان کرکے آسانی سے یہہ امر کہہ دینگے کہ نتیجہ صحیح ہے مثال ۶ ا خاص صورت اس مثال کی ہے اور چھتیسوین باب کی ۳۴ مثال بھی دیکھو

(۳۵) اول رقم صورت مفصلہ کی $ا^۳$ ہے

لا کے سر دریافت کرنے کے واسطے

ق + ۲ ر = ۱ اور ع + ق + ر = $-\frac{۱}{۲}$ اور ق = ۱ اور ع = −۱$\frac{۱}{۲}$ اور $(-\frac{۱}{۲})(-۲ب) = ب$

لا² کے سر دریافت کرنے کے واسطے

ق + ۲ ر = ۲ اور ع + ق + ر = $-\frac{۱}{۲}$

ر = ۱ اور ع = −۱$\frac{۱}{۲}$ اور ق = ۲ اور ع = −۲$\frac{۱}{۲}$

$(-\frac{۱}{۲}) + \frac{(-\frac{۱}{۲})(-\frac{۳}{۲})}{۲!}(-۲ب)^۲ = -\frac{۱}{۲} + \frac{۳ب^۲}{۲}$

لا³ کا سر دریافت کرنے کے لئے

ق + ۲ ر = ۳ اور ع + ق + ر = $-\frac{۱}{۲}$

ر = ۱ اور ق = ۱ اور ع = −۲$\frac{۱}{۲}$ اور ق = ۳ اور ع = −۳$\frac{۱}{۲}$

$(-\frac{۱}{۲})(-\frac{۳}{۲})(-۲ب) + \frac{(-\frac{۱}{۲})(-\frac{۳}{۲})(-\frac{۵}{۲})}{۳!}(-۲ب)^۳ = -\frac{۳ب}{۲} + \frac{۵ب^۳}{۲}$

لا⁴ کا سر دریافت کرو

ق + ۲ ر = ۴ اور ع + ق + ر = $-\frac{۱}{۲}$

ر = ۲ اور ع = −۲$\frac{۱}{۲}$ اور ر = ۱ اور ق = ۲ اور ع = −۳$\frac{۱}{۲}$ اور ق = ۴ اور ع = −۴$\frac{۱}{۲}$

$\frac{(-\frac{۱}{۲})(-\frac{۳}{۲})}{۲!} + \frac{(-\frac{۱}{۲})(-\frac{۳}{۲})(-\frac{۵}{۲})}{۲!}(-۲ب)^۲ + \frac{(-\frac{۱}{۲})(-\frac{۳}{۲})(-\frac{۵}{۲})(-\frac{۷}{۲})}{۴!}(-۲ب)^۴$

$= \frac{۳}{۸} - \frac{۱۵ب^۲}{۴} + \frac{۳۵ب^۴}{۸}$

(۳۴) صورت مفصلہ کی اول رقم آ¹ ہے

لا کے سر دریافت کرنے کے واسطے

ق + ۲ ر = ۱ اور ع + ق + ر = −۱

ق = ۱ اور ع = −۲ اور (−۱) آ² ب = − آ² ب

لا² کے سر دریافت کرنے کے واسطے

ق + ۲ ر = ۲ اور ع + ق + ر = −۱

ر = ۱ اور ع = -۲ اور ن = ۲ اور ع = -۳

(-۱) اَ^۲ ح + ((-۱)(-۲) / ۲) اَ^۳ بٓ = -اَ^۲ ح + اَ^۳ بٓ

لا^۳ کے سر دریافت کرنے کے واسطے

ق + ۲ر = ۳ اور ع + ق + ر = -۱

ر = ۱ اور ق = ۱ اور ع = -۳ اور ق = ۳ اور ع = -۴

(-۱)(-۲) اَ^۳ ب ح + ((-۱)(-۲)(-۳) / ۳) اَ^۴ بٓ = ۲ اَ^۳ ب ح - اَ^۴ بٓ

لا^۴ کے سر دریافت کرنے کے واسطے

ق + ۲ر = ۴ اور ع + ق + ر = -۱

ر = ۲ اور ع = -۳ اور ر = ۱ اور ق = ۲ اور ع = -۴ اور ق = ۴ اور ع = -۵

((-۱)(-۲) / ۲) اَ^۳ حٓ + ((-۱)(-۲)(-۳) / ۲) اَ^۴ بٓ ح + ((-۱)(-۲)(-۳)(-۴) / ۴) اَ^۵ بٓ

= اَ^۳ حٓ - ۳ اَ^۴ بٓ ح + اَ^۵ بٓ

یا اسطرح عمل کریں کہ

(اَ + ب لا + ح لا^۲)^{-۱} = اَ^{-۱} (۱ + ب لا/اَ + ح لا^۲/اَ)^{-۱}

= اَ^{-۱} [۱ - (ب لا/اَ + ح لا^۲/اَ) + (ب لا/اَ + ح لا^۲/اَ)^۲ - (ب لا/اَ + ح لا^۲/اَ)^۳ + ...]

اب مختلف قوائے ب لا/اَ + ح لا^۲/اَ کو تبلاؤ

(۷۵) صورت مفصلہ کی اول رقم ا ہے

لا کے سر دریافت کرنے کیواسطے

ق + ۲ر + ۳ص = ۱ اور ع + ق + ر + ص = ن

ق = ۱ اور ع = ن - ۱ اور ن (-۱) = -ن

لا^۲ کے سر دریافت کرنے کے واسطے

ق + ۲ر + ۳ص = ۲ اور ع + ق + ر + ص = ن

ر = ۱ اور ع = ن - ۱ اور ق = ۲ اور ع = ن - ۲

ن (-۱) + ن (ن - ۱) / ۲ (-۱)^۲ = - ن + ن (ن - ۱) / ۲ = ن (ن - ۳) / ۲

لا^۳ کے امثال دریافت کرنے کے واسطے

ق + ۲ ر + ۳ ص = ۳ اور ع + ق + ر + ص = ن

ص = ۱ اور ع = ن - ۱ اور ر = ۱ اور ق = ۱ اور ع = ن - ۲ اور ق = ۳ اور ع = ن - ۳

ن (-۱) + ن (ن - ۱) (-۱) (-۱) + ن (ن - ۱) (ن - ۲) / ۳ (-۱)^۳ = - ن + ن (ن - ۱) - ن (ن - ۱) (ن - ۲) / ۳

= - ن/۶ (ن - ۲) (ن - ۷)

(۳۸) یہہ نتائج استقرا سے قائم ہوسکتی ہین - اسال کی لئی ایک خاص قیمت س کی مقرر کرو اور یہہ امر تحقیق ہوجائیگا کہ جو استدلال ایک خاص قیمت پر کرنے سے نتیجہ پیدا ہوتا ہے وہی کوئی اور ر کی قیمت مقرر کرنے سے پیدا ہوگا - ہم ثابت کرسکتی ہین کہ ضرب کے کرنے سے جو قوانین کہ ن = ۲ فرض کرنے سے دریافت ہوئے ہین وہی اوس صورت مین بھی کہ ن = ۳ کے فرض کرین

فرضکرو کہ وہ ن کے کسی قیمت کے مقرر کرنے سے قائم ہوتے ہین اور ر = ۳ اور

(۱ + لا + لا^۲ + لا^۳)^ن = ا. + ا۱ لا + ا۲ لا^۲ + ... + ا۳ن-۱ لا^(۳ن-۱) + ا۳ن لا^۳ن

طرفین کو ۱ + لا + لا^۲ + لا^۳ مین ضرب دوتو

(۱ + لا + لا^۲ + لا^۳)^(ن+۱) = ا. + (ا. + ا۱) لا + (ا. + ا۱ + ا۲) لا^۲ + (ا. + ا۱ + ا۲ + ا۳) لا^۳ + (ا۱ + ا۲ + ا۳ + ا۴) لا^۴ + ...

اب ہم دیکھتے ہین کہ لا^۴ کا سر بڑا بنسبت لا^۳ کے سر کے ہی بشرطیکہ ا۴ بڑا ا. سے اور یہہ بموجب فرض کے ہے - اور علے ہذا القیاس

اڑتیسواں باب

(۱) فرضکرو کہ لوکارتھم مطلوب لا ہے تو ۱۴۴ = (۲√۳)^لا یعنے ۲^۴ × ۳^۲ = (۲ × √۳)^لا

یعنی (۲√۳)^۴ = (۲√۳)^لا اسواسطے لا = ۴

(۲) ۷ درمیان ۲ اور ۳ کے واقع ہے اصلی عدد باقی ۲ ہے

(۳) ۵ درمیان ۳ اور ۴ کے واقع ہے اصلی عدد باقی ۱ ہے

(۴) فرض کرو کہ لوکارتم مطلوب لا ہے تو $5^{لا}$ = ۱۵۱۳۱ یعنی $5^{لا}$ = $5^{لا}$ اسواسطے لا = ۵

(۵) ۱۲۳۰ درمیان 10^{3} اور 10^{4} کے واقع ہے اسواسطے عدد باقی ۳ ہے اور ۰۱۲۳ درمیان 10^{-1} اور 10^{-2} کے درمیان واقع ہے اسواسطے عدد باقی -۲ ہے

(۶) لوگ ۰٫۵ = لوک $\frac{5}{10}$ = لوک ۵ - لوک ۱۰ = لوک ۵ - ۱ اور لوک ۵ = لوک $\frac{10}{2}$

= لوک ۱۰ - لوک ۲

اور لوگ ۰٫۵۴ = لوگ $\frac{54}{100}$ = لوک ۵۴ - ۲ اور لوگ ۵۴ = لوگ $3^{3} \times 2$ پس لوک ۵۴ = ۳ لوک ۳ + لوک ۲

(۷) لوک ۰٫۰۰۶ = لوک $\frac{6}{1000}$ = لوک ۶ - ۳ اور لوک ۶ = لوک ۲ + لوک ۳

(۸) لوک ۳۶ = لوک $(2^{2} \times 3^{2})$ = ۲ لوک ۲ + ۲ لوک ۳ اور لوک ۲۷ = لوک 3^{3} = ۳ لوک ۳ اور لوک ۱۶

= لوک 2^{4} = ۴ لوک ۲

(۹) ۶۴۸ کو ۲ پر تقسیم کرو اور پھر خارج قسمت کو ۲ پر اور تقسیم جہاںتک ممکن ہے جاری رکھو پھر ۳ پر تقسیم کرو اور خارج قسمت جو نکلے پھر اوسے ۳ پر تقسیم کرو جہاںتک ممکن ہو تو یہہ معلوم ہوگا کہ ۶۴۸ = $2^{3} \times 3^{4}$ اور ایسی ہی ۸۶۴ = $2^{5} \times 3^{3}$ اسواسطے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

۳ لوک ۲ + ۴ لوک ۳ = ۲٫۸۱۱۵۷۵۰۱ اور ۵ لوک ۲ + ۳ لوک ۳ = ۲٫۹۳۶۵۱۳۷۴

ان دو مساواتوں سے لوگ ۲ اور لوک ۳ معلوم کرو اور لوک ۵ = لوک $\frac{10}{2}$ = ۱ - لوک ۲

(۱۰) لوگ $\sqrt{1.25}$ = لوگ $\sqrt{\frac{125}{100}}$ = $\frac{1}{2}$ (لوک ۱۲۵ - لوک ۱۰۰) = $\frac{3}{2}$ لوگ ۵ - ۱

= $\frac{3}{2}$ (۱ - لوگ ۲) - ۱

(۱۱) لوگ ۰٫۰۰۲۵ = لوک $\frac{25}{10000}$ = لوک ۲۵ - ۴ = ۲ لوک ۵ - ۴ = ۲ (۱ - لوک ۲) - ۴

(۱۲) لوگ $\sqrt[3]{0.125}$ = لوک $(\frac{125}{1000})^{\frac{1}{3}}$ = $\frac{1}{3}$ (لوگ ۱۲۵ - لوگ ۱۰۰۰)

= لوگ ۵ - $\frac{3}{3}$ = ۱ - لوک ۲ - $\frac{3}{3}$

(۱۳) لوگ ۱۰۸۰ = لوگ (۱۰ × ۲ × ۳) = ۱ + ۲ لوگ ۲ + ۳ لوگ ۳

لوگ (۰۰۴۵ ء۰)$^{\frac{1}{9}}$ = $\frac{1}{9}$ لوگ $\frac{۴۵}{۱۰۰۰۰}$ = $\frac{1}{9}$ [لوگ (۵ × ۳) - ۴]

= $\frac{1}{9}$ لوگ ۵ + $\frac{1}{9}$ لوگ ۳ - $\frac{4}{9}$ = $\frac{1}{9}$ (۱ - لوگ ۲) + $\frac{2}{9}$ لوگ ۳ - $\frac{4}{9}$

(۱۴) اول لوکارثم موافق اساس ۱۰ کے دریافت کرتے ہیں لوگ ($\frac{4}{۳۴۳}$)$^{\frac{1}{2}}$ = $\frac{1}{2}$ لوگ $\frac{4}{۳۴۳}$

= $\frac{1}{2}$ لوگ $\frac{2}{7}$ = $\frac{1}{2}$ (لوگ ۲ - لوگ ۷) = لوگ ۲ - $\frac{3}{2}$ لوگ ۷ = ۱۷ء۹۴۴۴۱۷

لوکارثم ۱۰۰۰ اکی اساس کے موافق لوگ $\frac{1}{۱۰۰۰}$ یعنی $\frac{1}{3}$ میں ضرب دینے سے حاصل ہوگی (دفعہ ۵۴۳ دیکھو)

اسسے معلوم ہوا کہ لوکارثم مطلوب $\frac{۱۷ء۹۴۴۴۱۷}{۳}$ ہے

(۱۵) لوگ $۲^{۴۴}$ = ۴۴ لوگ ۲ = ۱۹ء۲۴۵۹۲ پس $۲^{۴۴}$ درمیان $۱۰^{۱۹}$ اور $۱۰^{۲۰}$ کے واقع ہے

پس ۲۰ ہندسے ہیں

(۱۶) لوگ (۴۲۵ء۰)$^{\frac{1}{5}}$ = $\frac{1}{5}$ لوگ $\frac{۴۲۵}{۱۰۰۰۰}$ = $\frac{1}{5}$ (لوگ ۵ - لوگ ۱۰۰۰۰)

= $\frac{4}{5}$ لوگ ۵ - $\frac{4}{5}$ = $\frac{4}{5}$ (۱ - لوگ ۲) - $\frac{4}{5}$ = ۵۵۹۱۷۶ء - $\frac{4}{5}$ =

۱۷۶ء۵۵۹۱ + $\frac{1}{5}$ - ۱ = ۱ - ۷۵۹۱۷۶ء = لوگ $\frac{۹۱}{۱۰}$ ۵ء۷۴۳۴۹۱

= لوگ ۹۱ ۷۴۳۴۹۱ء۵ اسواسطے (۴۲۵ء۰)$^{\frac{1}{5}}$ = ۹۱۴۳۴۹۱ء۵

(۱۷) ۱۰ سے $۱۰^{ع+۱}$ تک میں جو اعداد ہیں اونکا عدد بیانی ع ہے

اسلئی ع = $۱۰^{ع}$ (۱۰ - ۱) اور اعداد کے متکافی درمیان $۱۰^{ق}$ اور $۱۰^{ق+۱}$ + ۱

کے درمیان ہیں اور یہہ دونوہی اونمیں داخل ہیں اسلئی ق = $۱۰^{ق-۱}$ (۱۰ - ۱) اسواسطے

لوگ ع - لوگ ق = ع - (ق - ۱)

(۱۸) معلوم مساواتوں کی لوکارثم لو تو لوگ ر = $\frac{1}{۱ - لوگ ل}$ اور لوگ ی = $\frac{1}{۱ - لوگ ر}$

لوگ ر کی قیمت جو اول مساوات سے دریافت ہوا اوسکو دوسرے مساوات میں صرف کرو تو

لوگ ی = $\frac{۱ - لوگ ل}{- لوگ ل}$ اسواسطے لوگ ل = $\frac{1}{۱ - لوگ ی}$ اسواسطے

ل = $۱۰^{\frac{1}{۱ - لوگ ی}}$

اور ظاہر ہے کہ ی ۱ سے کم ہے

(۱۹) فرض کرو کہ $ن = ا^{لا} = ب^{ی} = ح^{ک}$ تو $لا = لوک_{ن} ا$ اور $ی = لوک_{ن} ب$ تو

$ا = ن^{\frac{۱}{لا}}$ اور $ب = ن^{\frac{۱}{ی}}$ اور $ح = ن^{\frac{۱}{ک}}$ لیکن $ب^{۲} = اح$ اسواسطے

$ن^{\frac{۲}{ی}} = ن^{\frac{۱}{لا} + \frac{۱}{ک}}$ اسواسطے $\frac{۲}{ی} = \frac{۱}{لا} + \frac{۱}{ک}$

(۲۰) فرض کرو کہ آبادی کے تعداد کو کسی خاص سال شروع مین ع تعبیر کرتا ہی تو آخر سال مین آبادی
$ع + \frac{ع}{۴۵} - \frac{ع}{۶۰}$ یعنی $\frac{۱۸۱}{۱۸۰} ع$ سے تعبیر ہوگی اور اسی طرح سے دوسرے سال کے آخر مین
وہ $\frac{۱۸۱}{۱۸۰} \times \frac{۱۸۱}{۱۸۰} ع$ یعنی $\left(\frac{۱۸۱}{۱۸۰}\right)^{۲} ع$ سے تعبیر ہوگی غرض لا سال کے آخر مین
$\left(\frac{۱۸۱}{۱۸۰}\right)^{لا} ع$ سے تعبیر ہوگی ـ فرض کرو کہ لا سال کے آخر مین آبادی دوچند ہوگی تو
$\left(\frac{۱۸۱}{۱۸۰}\right)^{لا} ع = ۲ع$ اسواسطے $\left(\frac{۱۸۱}{۱۸۰}\right)^{لا} = ۲$ اسواسطے $لا\ لوگ\ \frac{۱۸۱}{۱۸۰} = لوگ\ ۲$

اسواسطے $لا = \frac{لوک\ ۲}{لوگ\ ۱۸۱ - لوک\ ۱۸۰} = \frac{۰۳۰۱۰۳۰}{۰۰۰۲۴۰۶}$

اونتالیسوان باب

(۱) مساوات (۱) دفعہ ۵۴۵ مین $لا^{۲} - ۱$ بجای م اور $لا^{۲}$ بجای ن کے رکھو تو ہم کو
نتیجہ مطلوب حاصل ہوگا

$\frac{۱}{لوک_{ی} ۱۰}$ مین ضرب دو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$لوک_{۱۰} (لا + ۱) = ۲ لوگ_{۱۰} لا - لوک_{۱۰} (لا - ۱) - \frac{۲}{لوک_{ی} ۱۰} \left[\frac{۱}{۲لا^{۲} - ۱} + \frac{۱}{۳} \left(\frac{۱}{۲لا^{۲} - ۱}\right)^{۳} + ۰۰ \right]$

بجای لا کے ۱۰ رکھو تو $لوک_{۱۰} ۱۱ = ۲ - ۲ لوک_{۱۰} ۳ - \frac{۲}{لوک_{ی} ۱۰} \left[\frac{۱}{۱۹۹} + \frac{۱}{۳(۱۹۹)^{۳}} + ۰۰ \right]$

(۴) $سہ + صہ = -\frac{ب}{ا}$ اور $سہ صہ = \frac{ح}{ا}$ بموجب دفعہ ۳۳۶ کے

پس $ا - ب لا + ح لا^{۲} = ا \left[۱ + (سہ + صہ) لا + سہ صہ لا^{۲} \right] = ا (۱ + سہ لا)(۱ + صہ لا)$

اسواسطے $لوک (ا - ب لا + ح لا^{۲}) = لوک\ ا + لوک (۱ + سہ لا) + لوک (۱ + صہ لا)$

پس $لوک (۱ + سہ لا)$ اور $لوگ (۱ + صہ لا)$ موافق دفعہ ۵۴۴ پھیلاؤ

(۷) $لوگ_{ی} \left[(۱ + لا)^{\frac{۱ + لا}{۲}} (۱ - لا)^{\frac{۱ - لا}{۲}} \right] = \frac{۱ + لا}{۲} لوگ_{ی} (۱ + لا) + \frac{۱ - لا}{۲} لوک_{ی} (۱ - لا)$

پس لوک$_{ی}$(۱+لا) اور لوک$_{ی}$(۱−لا) کو پہیلاؤ

(۸) $\frac{۵۰۱}{۴۹۹} = \frac{۱ + \frac{۱}{۵۰۰}}{۱ - \frac{۱}{۵۰۰}} = \frac{۱ + ۰٫۰۰۲}{۱ - ۰٫۰۰۲}$ اسواسطے

$$\text{لوگ}_{ی}\frac{۵۰۱}{۴۹۹} = ۲\left[۰٫۰۰۲ + \frac{(۰٫۰۰۲)^۳}{۳} + \frac{(۰٫۰۰۲)^۵}{۵} + \dots\right]$$

اب $\frac{(۰٫۰۰۲)^۳}{۳}$ مین اول ۸ مرتبون مین صفر ہین پس اگر ۰٫۰۰۲ پر ٹھہر جاین تو نتیجہ ۸ مرتبہ تک نکلیگا اور $\frac{(۰٫۰۰۲)^۵}{۵}$ مین اول چودہ مرتبہ مین صفر ہین پس اگر ہم $\frac{(۰٫۰۰۲)^۳}{۳}$ پر ٹھہر جائین تو تیرہ مرتبے نتیجہ مین نکلینگے اور علے ہذا القیاس

(۹) جب ن نہایت بڑا ہو تو $\left(۱ + \frac{\text{لا}}{ن}\right)^{ن} \div ی^{\text{لا}}$ یعنے $\left(۱ + \frac{\text{لا}}{ن}\right)^{ن} ی^{-\text{لا}}$ کے واسطے صورت متصلہ قوا لا مین درحقیقت دریافت کرنی ہی اب

$$\text{لوگ}\left[\left(۱ + \frac{\text{لا}}{ن}\right)^{ن} ی^{-\text{لا}}\right] = ن\ \text{لوک}\left(۱ + \frac{\text{لا}}{ن}\right) - \text{لا} = -\frac{\text{لا}^۲}{۲ن} + \frac{\text{لا}^۳}{۳ن^۲} - \dots$$

اسواسطے

$$\left(۱ + \frac{\text{لا}}{ن}\right)^{ن} ی^{-\text{لا}} = ی^{-\frac{\text{لا}^۲}{۲ن} + \frac{\text{لا}^۳}{۳ن^۲} \dots} = ۱ - \frac{\text{لا}^۲}{۲ن} + \frac{\text{لا}^۳}{۳ن^۲} + \frac{\text{لا}^۴}{۸ن^۲} + \dots$$

یہان وہ رقمین جنمین $\frac{۱}{ن^۲}$ کی قوا اعلی درجے کی شامل ہین نہین بیان کی گئی اسلئے کہ جب ن نہایت بڑا ہو تو وہ بہت چھوٹی ہونگی

(۱۰) $(ا + ب\,\text{لا} + ح\,\text{لا}^۲)\, ی^{-\text{لا}}$ مین $\text{لا}^{ن}$ کا سر دریافت کرنا چاہتے ہین اب

$$ی^{-\text{لا}} = ۱ - \text{لا} + \frac{\text{لا}^۲}{|۲} - \dots + \frac{(-۱)^{ن}\text{لا}^{ن}}{|ن} \dots$$

پس

$$\text{سر} = \frac{ا(-۱)^{ن}}{|ن} + ب\frac{(-۱)^{ن-۱}}{|ن-۱} + ح\frac{(-۱)^{ن-۲}}{|ن-۲}$$

$$= \frac{(-۱)^{ن}}{|ن-۲}\left[\frac{ا}{ن(ن-۱)} - \frac{ب}{ن-۱} + ح\right]$$

(۱۱) لوک$_{ی}$(۱+لا) مین بجای لا کے ۱ رکھو تو

$$\text{لوک}_{ی}\,۲ = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۶} + \dots$$

ارقام کے مرکب کرنے سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ $\text{لوک}_{ی}\,۲ = ۱ - \frac{۱}{۳\times۲} - \frac{۱}{۵\times۴} - \frac{۱}{۷\times۶} + \dots$

ہاسے معلوم ہوا کہ جمع کرنے سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

اور اگر لا باعتبار کمیت کے واحد سے بڑا ہے تو سلسلہ انفراجی اور اگر کم ہے تو انضمامی بحکم دفعات ۵۵۹ اور ۵۰۶۰ اگر لا = ۱ تو سلسلہ

$= \frac{1}{ع} \left[\frac{1}{(ح+1)ع} + \frac{1}{(ح+2)ع} + \frac{1}{(ح+3)ع} + \cdots \right]$ اسمین ح بجای ل کے ہے

اب اس سلسلہ کے انضمامی اور انفراجی ہونے کی وہی صورتیں ہیں جو دفعہ ۵۶۲ کے سلسلہ کی ہیں مثلاً اگر ح = ۴ اب اگر اول چار رقموں کو اٹھا ڈالو تو سلسلہ معینہ وہی ہے جو دفعہ ۵۶۲ مین ہے - اگر ۴ اور ۵ کے درمیان ح واقع ہوتا ہے

تو یہہ سلسلہ دفعہ ۵۶۲ کے سلسلہ سے اگر اوسکی چار رقمین اٹھا ڈالین چھوٹا ہوگا اور اگر اوسکی پانچ رقمین اٹھا ڈالین تو بڑا ہوگا

(۱۱) $س_2 + س_3 > 2 س_3$ اور $س_4 + س_5 + س_6 + س_7 > 4 س_7$

$س_8 + س_9 + \cdots + س_{15} > 8 س_{15}$ اور علے ہذا القیاس اسے معلوم ہوتا ہے کہ اول سلسلہ بڑا ہے بہ نسبت نصف دوسرے سلسلہ کے پس اگر دوسرا انفراجی ہے تو پہلا بھی انفراجی ہے

$س_1 + س_2 < 2 س_1$ اور $س_3 + س_4 + س_5 + س_6 < 4 س_3$ اور

$س_7 + س_8 + \cdots س_{14} < 8 س_7$ اور علے ہذا القیاس اسے معلوم ہوتا ہے کہ پہلا سلسلہ بہ نسبت دوسرے سلسلہ کے کم ہے پس اگر دوسرا سلسلہ انضمامی ہے تو پہلا سلسلہ بھی انضمامی ہے

(۱۲) سلسلہ $= 1 + \frac{1-\frac{2}{ن}}{ن} + \frac{1-\frac{3}{ن}}{ن^2} + \frac{1-\frac{4}{ن}}{ن^3} + \cdots$

$= 1 + \frac{1}{1-ن} + \frac{1}{1-ن^2} + \cdots - \left[\frac{1}{ن} + \frac{2}{ن^2} + \frac{3}{ن^3} + \cdots \right]$

اگر ن بڑا ۱ سے ہے تو دو سلسلون مین سے ہر ایک انضمامی ہے اور اسلئے سلسلہ مفروض بھی انضمامی ہے اگر ن = ۲ تو اول سلسلہ انفراجی ہے اور دوسرا انضمامی ہے پس اس سبب سے سلسلہ مفروض انفراجی ہے اگر ن چھوٹا ۲ سے ہے تو سلسلہ مفروض کے ہر ایک رقم بہ نسبت اوسی صورت کی جسمین ن = ۲ ہے بڑی ہے اسی سے معلوم ہوا کہ سلسلہ مفروض انفراجی ہے

اکتالیسواں باب

(۱) فرضکرو کہ جمع واجب الادا م ہے اور ب ٹا ہے تو ب ا = م ن ر / (۱ + ن ر) اور فرض کرو کہ س سود اس جمع پر ہے تو س = م ن ر اور م اور س کے درمیان نصف اوسط موسیقیہ = ۲ م × س / (م + س) = ۲ م^۲ ن ر / (۲ م + م ن ر) = م ن ر / (۱ + ½ ن ر)

(۲) ۲ ن ر = ۱۸۰ اور م ن ر / (۱ + ن ر) = ۱۵۰ اسواسطے ۱۸۰ / (۱ + ن ر) = ۱۵۰

اسواسطے ۱۸ / ۱۵ = ۱ + ن ر اسواسطے ن ر = ۱/۵ اسواسطے م = ۱۸۰ × ۵ = ۹۰۰

(۳) فرض کرو کہ شرح سود ر ہے تو ط ر = ص ر / (۱ + ر) اسواسطے ر = (ص − ط) / ط

(۴) فرض کرو شرح سود ر ہے تو ۱ + ۴۰ ر = ۲ اسواسطے ر = ۱/۴۰

(۵) فرض کرو کہ چہ مہینے کی مدت پر جو جنس بیچی جاتی اوسکی قیمت م ہے اور ع قیمت نقد اوس جنس کی ہے

تو بموجب دفعہ ۷۷۵ کے ع / م = ۱ / (۱ + ن ر) لیکن ر = ۵ / ۱۰۰ = ۱/۲۰ اور ن = ½

اسواسطے ع / م = ۱ / (۱ + ۱/۴۰) = ۴۰ / ۴۱

(۶) فرض کرو کہ سالوں کی تعداد ن ہے تو بموجب دفعہ ۷۷۵ کے

۱۰۰ (۱ + ۵/۱۰۰)^ن = ۱۰۰ × ۲۱۰/۱۰۰ اسواسطے (۱۰۵ / ۱۰۰)^ن = ۲۱۰ / ۱۰۰

اسواسطے (۲۱/۲۰)^ن = ۲۱۰ / ۱۰۰ اسواسطے ن لوگ ۲۱/۲۰ = لوگ ۲۱۰/۱۰۰

اسواسطے ن = (لوگ ۲۱۰ − لوگ ۱۰۰) / (لوگ ۲۱ − لوگ ۲۰) = (لوگ ۲۱۰ − لوگ ۲ − ۱) / (لوگ ۲۱۰ − لوگ ۲ − ۲)

اب لوگ ۲۱۰ = لوگ ۱۴ + لوگ ۱۵ اور لوگ ۲ = لوگ (۱۶)^¼ = ¼ لوگ ۱۶ پس ن = ۱۵۰۲۱۱۹ / ۵۰۲۱۱۹

(۷) فرض کرو کہ سالوں کی تعداد ن ہے اسواسطے بموجب دفعہ ۷۷۵ کے

ع (۱ + ۳½/۱۰۰)^ن = ۳ ع اسواسطے (۱۰۰۳۵)^ن = ۳

اسواسطے ن لوگ ۱۰۰۳۵ = لوگ ۳ اسواسطے ن = لوگ ۳ / لوگ ۱۰۰۳۵ = ۱۲۷۷۱۲۱ / ۰۱۴۹۴

(۸) بموجب دفعہ ۷۷۵ کے طریقہ کتابت کے ع ع = ع ن^م اور ق ع = ع ن^ق

اسواسطے ع = $\frac{1}{4}$ اور ن = $4^{ن}$ اسواسطے ع = و $\frac{ن}{4}$ کیونکہ ہر ایک = ۱ اسواسطے ع = ق اسواسطے لوگ ق = $\frac{ن}{4}$

بیالیسوان باب سوالات متفرقہ

(۱) دفعہ ۵۸۰ کے طریقہ کتابت کے موافق ع = ۴۰۰ اور ع = ۲۱۰۰ اور د = ۲ اور د = ۸ اور ر = $\frac{۰۵}{۱}$ اسی سے یہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے کہ $\frac{۲۱۰۰ (۸ - لا)}{۱ + \frac{۸ - لا}{۲۰}}$ = ۲۰۰ (لا − ۲)

اسواسطے ۲۱۰۰ (۸ − لا) = ۴۰۰ (لا − ۲) + ۲۰ (۸ − لا) (لا − ۲)

(۲) دفعہ ۵۸۰ کے طریقہ کتابت کے موافق ع = ۱۲۰ اور ع = $۱۴\frac{1}{۲}$ اور د = ۰ اور د = ۲۷۰ وقت کو دنون مین بیان کیا اور ر = $\frac{۲}{۱۹۲ \times ۱۰۰}$ = $\frac{۱}{۹۶۰۰}$ اسے

$\frac{۱۴\frac{1}{۲} (لا - ۲۷۰)}{۱ + \frac{لا - ۲۷۰}{۹۶۰۰}}$ = ۱۲۰ لا اسواسطے $\frac{۶۵}{۴}$ (۲۷۰ − لا) = ۱۲۰ لا + $\frac{لا (لا - ۲۷۰)}{۴۸۰}$

(۳) بموجب دفعات ۵۷۴ اور ۵۷۷ بنا عام پر جبکہ ہر روز قیمت واجب الادا ہی ع لا سال مین ع [۱ − ی − ر (د − لا)] ہی اور ع کا سود لا − د سال مین ع [ی ر (لا − د) − ۱] ہے

پس ان دونو جملون کو برابر لکھدین

(۴) فرض کرو کہ لا اور ء اور ی ان تین حصون کے روپیون کو تعبیر کرتے ہین تو لا $ا^{ص}$ = ء $ا^{ص}$ = ی $ا^{س}$ ان مساواتون کو اس طرح سے بھی لکھہ سکتی ہین کہ $\frac{لا}{ا^{ط}}$ = $\frac{ء}{ا^{ص}}$ = $\frac{ی}{ا^{س}}$ بموجب دفعہ ۳۱۴ کے ہر ایک کسر ان مساواتون مین کی $\frac{لا + ء + ی}{ا^{ط} + ا^{ص} + ا^{س}}$ کی برابر ہے لیکن لا + ء + ی برابری کے معلوم ہے تو اسے ہم کو لا اور ء اور ی معلوم ہو جاینگے

(۵) دفعہ ۵۲۶ کے طرح فرض کرو کہ $(ا + \sqrt{ا^{۲} - ۱})^{ن}$ کا صحیح حصہ ص ہے اور ص + ک اوسکی پوری قیمت ہے اور ک ایک کسر واجب ہے تو

ص + ک = $ا^{ن}$ + ن $ا^{ن-۱}$ $\sqrt{ا^{۲} - ۱}$ + $\frac{ن (ن - ۱)}{۲}$ $ا^{ن-۲}$ $(ا^{۲} - ۱)$ + ...

اور ا − $\sqrt{ا^{۲} - ۱}$ ایک کسر واجب ہے اسواسطے $(ا - \sqrt{ا^{۲} - ۱})^{ن}$ کسر واجب ہے اسکو ک سے تعبیر کرو تو

کَ = اⁿ − ن اⁿ⁻¹ √(ا² − ۱) + ن(ن−۱)/۲ اⁿ⁻² (ا² − ۱) − ...

پس جمع کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ ص + ک + کَ = ایک جفت صحیح عدد کے سوا اسکے

ک + کَ = ۱ اور ص = ایک طاق عدد کے

(۶) موافق مثال گذشتہ

ص + ک = [√(ا² + ۱) + ا]ⁿ = (ا² + ۱)^(ن/۲) + ن (ا² + ۱)^((ن−۱)/۲) ا + ن(ن−۱)/۲ (ا² − ۱)^((ن−۲)/۲) ا² + ...

کَ = [√(ا² + ۱) − ا]ⁿ = (ا² + ۱)^(ن/۲) − ن (ا² + ۱)^((ن−۱)/۲) ا + ن(ن−۱)/۲ √(ا + ۱)^((ن−۲)/۲) ا² − ...

اگر ن جفت ہو اور ہم ان دونوں حاصل کو موافق مثال پنجم جمع کریں تو اوسی شابہ ایک نتیجہ نکلیگا اور اگر ن طاق ہو تو دوسرے حاصل کو اول حاصل سے تفریق کریں تو ص + ک − کَ = ایک جفت صحیح عدد کے

اسسے معلوم ہوا کہ ک − کَ = ۰ اور ص = ایک جفت عدد کے

(۷) (ا/(ا + لا))² = (۱/(لا/ا + ۱))² = (۱ + لا/ا)⁻² = ۱ − ۲ لا/ا + ۳ (لا/ا)² − ...

پس ہم کو ۱ − ۲ (لا/ا) + ۳ (لا/ا)² + ... + (ن + ۱) (−۱)ⁿ (لا/ا)ⁿ کے مجموعہ کو (ا/(ا + لا))² مین سے تفریق کرنا چاہیے تو باقی مطلوب حاصل ہوگی

دفعہ ۲۷۴ مین ا کے جگہہ ۱ اور ر کے جگہ −لا/ا رکھو تو مجموعہ یہہ حاصل ہوگا کہ

[۱ − (−لا/ا)ⁿ]/(۱ + لا/ا) − (لا/ا)[۱ − ن (−لا/ا)ⁿ⁻¹ ...]/(لا/ا + ۱)² یعنی [۱ − (ن + ۱)(−لا/ا)ⁿ − ن (لا/ا)(−لا/ا)ⁿ]/(لا/ا + ۱)²

اسکو ۱/(۱ + لا/ا)² سے تفریق کرو تو باقی = (−لا/ا)ⁿ (ن + ۱ + ن لا/ا)/(لا/ا + ۱)²

(۱۰) یہہ کا کل سر یہہ ہوگا کہ

۱ − ن + ن(ن−۱)/۲ − ن(ن−۱)(ن−۲)/۳ + ... یعنی (۱ − ۱)ⁿ یعنی صفر ہوگا

اور صہ کا کل سر

−ن [۱ − (ن−۱) + (ن−۱)(ن−۲)/۲ − ...] یعنی −ن (۱ − ۱)ⁿ⁻¹ یعنی صفر

(۱۱) ص = ا [(۱ + لا)ⁿ − ۱]/(۱ + لا − ۱) اسواسطے (۱ + لا)ⁿ = ۱ + ص لا/ا طرفین مساوات کی لوکارثم لو

اسواسطے لا ی = ۱

(۱۱) مول بیاج ا روپیہ کا ا سال مین = ی اسواسطے ایک روپیہ کا ا برس مین = ی - ۱ = ۱/م بموجب فرض کے
اسواسطے ی = (۱ + م)/م اور ع روپیہ کا ن برسون مین مول بیاج = ع یⁿ = ع ((۱ + م)/م)ⁿ

(۱۲) فرضکرو کہ ع روپیہ قرض لیا تو ایک سال کے اخر مین قرض ع ط ع رہیگا اور اگر اسمین سے ع ر ادا کیا گیا تو
تو ع - ع ر قرض باقی رہا یعنی (۱ - ر) ع اسی طرح سے ہم دوسرے سال کے اخر مین دریافت کر سکتے ہین
کہ ع (۱ - ر) (۱ - ر) باقی رہا یعنی ع (۱ - ر)² اور تیسرے سال کے اخر مین ع (۱ - ر)³ باقی رہیگا
اور علے ہذا القیاس

(۱۳) بموجب دفعہ ۵۹۸ کے ہم کو ۱۰ روپیہ زرسالیانہ کی قیمت دریافت کرنی ہے جو تیرہوین سال شروع
ہوتا ہے اور ۷ برس تک جاری رہتا ہے اور بموجب دفعہ ۵۹۷ کے وہ یہہ ہے کہ
۱/(ط - ۱) (ط¹³ - ط²⁰) جسمین ط = ۱.۰۶ = ۱.۰۶ اب لوگ ط¹³ = ۱۳ لوگ ۱.۰۶
= ۰.۳۲۸۹۷۶۷ = ۰.۲۳۳ . ۴۷۵ ۱ اسواسطے ط¹³ = ۴۶۸۸۳۸۵ ، ۲
لوگ ط²⁰ = ۲۰ لوگ ۱.۰۶ = ۰.۵۰۶۱۱۸۰ = ۰.۴۹۳۸۸۲۰ - ۱
اسواسطے ط⁻²⁰ = ۳۱۱۸۰.۴۲ ، پس زر تجدید پٹہ = ۱۰ × ۱/۰.۰۶ (۲۴۶۸۸۳۸۵ - ۳۱۱۸۰.۴۲)

(۱۴) ب زرسالیانہ کی قیمت حال ب(۱ - طⁿ)/(ط - ۱) ہے پس ظاہر ہے کہ اگر یہہ رقم بڑی ا سے
تو وہ شخص تباہ ہوجائیگا یعنی اگر ب (۱ - طⁿ) بڑا ا (ط - ۱) سے ہو اس صورت مین ب = ۹۰
ط = ۱.۰۵ اور ا = ۱۰۰۰ پس وہ آدمی تباہ اوس صورت مین ہوجائیگا کہ ۹۰ (۱ - طⁿ)
بڑا بہ نسبت ۵۰ کے ہو یعنی اگر ۱ - طⁿ بڑا بہ نسبت ۵/۹ کے ہو یعنی اگر طⁿ چھوٹی ۴/۹ سے ہو
پس اب ہم کو یہہ ثابت کرنا ہے کہ ۱/طⁿ چھوٹا بہ نسبت ۱ ÷ ۹/۴ کے ہو یعنی طⁿ بڑی بہ نسبت ۹/۴ کے ہو
جب ن = ۱۷ تو لوگ ط¹⁷ = ۱۷ لوگ ط = ۱۷ لوگ ۲۱/۲۰ = ۱۷ لوگ ۲۱ - لوگ ۲۰)
= ۱۷ (لوگ ۷ + لوگ ۳ - ۱ - لوگ ۲) اور لوگ ۹/۴ = لوگ ۹ - لوگ ۴ = ۲ لوگ ۳ - ۲ لوگ ۲
معلوم ہوتا ہے کہ پہلے لوگارتم بڑی بہ نسبت دوسرے کے ہے

چوالیسوان باب

(۷) بموجب دفعہ ۴۰۵ کے $ع_1 ق_2 - ع_2 ق_1 = \pm 1$ اور $ع_2 ق_3 - ع_3 ق_2 = \mp 1$
اسواسطے $ع_1 ق_3 - ع_3 ق_1 = -(ع_2 ق_3 - ع_3 ق_2)$ اسواسطے $(ع_3 - ع_2) ق_2 = (ق_3 - ق_1) ع_2$

(۸) فرض کرو کہ $\frac{ع_1}{ق_1}$ اور $\frac{ع_2}{ق_2}$ دو متقرب متصلہ ہوں تو $ق_1$ اور $ق_2$ کا کوئی دو مشترک بڑا واحد سے نہیں ہو سکتا اسواسطے کہ $ع_1 ق_2 - ع_2 ق_1 = \pm 1$ ہی جب کوئی عدد واحد سے بڑا دونو $ق_1$ اور $ق_2$ کو تقسیم کریگا تو ضرور ہی کہ وہ ± 1 کو بھی پورا تقسیم کری اور یہہ باطل ـ علیٰ ہذا القیاس $ع_1$ اور $ع_2$ کو کوئی عدد واحد سے بڑا تقسیم نہین کرسکتا

(۹) $ع_1 ق_2 - ع_2 ق_1 = -1$ اسواسطے کہ اول متقرب نہایت چھوٹا ہی اور اسواسطے دوسرے متقرب سے چھوٹا ہی پس $ع_2 ق_3 - ع_3 ق_2 = -(ع_1 ق_2 - ع_2 ق_1) = (-1)^2$
پس $ع_3 ق_4 - ع_4 ق_3 = -(ع_2 ق_3 - ع_3 ق_2) = (-1)^3$ اور علیٰ ہذا القیاس

(۱۰) $\frac{ع_2}{ق_2} - \frac{ع_1}{ق_1} = \frac{1}{ق_1 ق_2}$ اور $\frac{ع_3}{ق_3} - \frac{ع_2}{ق_2} = -\frac{1}{ق_2 ق_3} \ldots \frac{ع_ن}{ق_ن} - \frac{ع_{ن-1}}{ق_{ن-1}} = \frac{(-1)^ن}{ق_{ن-1} ق_ن}$
ان سب نتائج کو جمع کرو

(۱۱) ساتوین مثال کے موافق

$$(ع_{ن+1} - ع_{ن-1}) ق_ن = (ق_{ن+1} - ق_{ن-1}) ع_ن$$

$$(ع_{ن+2} - ع_ن) ق_{ن+1} = (ق_{ن+2} - ق_ن) ع_{ن+1}$$ اسواسطے

$$(ع_{ن+1} - ع_{ن-1})(ع_{ن+2} - ع_ن) ق_ن ق_{ن+1} = (ق_{ن+1} - ق_{ن-1})(ق_{ن+2} - ق_ن) ع_ن ع_{ن+1}$$

$ع_ن ع_{ن+1} ق_ن ل_{ن+1}$ پر تقسیم کرو

(۱۲) ہم کو معلوم ہی کہ $\frac{ع_ن}{ق_ن} = \frac{ع_{ن-1} س_ن + ع_{ن-2}}{ق_{ن-1} س_ن + ق_{ن-2}}$ اسواسطے

$$ع_ن ق_{ن-2} - ع_{ن-2} ق_ن = س_ن (ع_{ن-1} ق_{ن-2} - ع_{ن-2} ق_{ن-1}) = - س_ن (-1)^{ن}$$

$= (-1)^{ن-1} س_ن$ بموجب مثال ۹

(۲۰) دفعہ ۴۰۸ اور مثال ۱۸ دیکھو

(۲۱) آٹھواں متقرب $\frac{۱۵۲۰}{۴۷۳}$ ہے اور نواں متقرب $\frac{۱۶۰۶۳}{۲۸۸۵}$ دفعہ ۴۰۸ دیکھو

(۲۲) فرض کرو کہ $لا = ۱ + \frac{۱}{۳+}\ \frac{۱}{۲+}\ \frac{۱}{۳+}\ \frac{۱}{۱+۳}$ پس $لا = ۱ + \frac{۱}{\frac{۱}{۱-لا+۲}+۳}$ یعنی

$لا = ۱ + \frac{۱}{\frac{۲+لا۳}{۱+لا}} = ۱ + \frac{۱+لا}{۲+لا۳} = \frac{۵+لا۴}{۲+لا۳}$ اسواسطے $۳لا^۲ + ۲لا = ۴لا + ۵$

(۲۳) فرض کرو کہ $لا = \frac{۱}{ب+}\ \frac{۱}{ا+}\ \frac{۱}{ب+}\ \frac{۱}{ا+}$ ... اسواسطے $لا = \frac{۱}{ب+\frac{۱}{ا+لا}} = \frac{ا+لا}{اب+۱+بلا}$ اسواسطے

$بلا^۲ + ابلا = ا$ اسواسطے $لا(لا+ا) = \frac{ا}{ب}$ اور یہی ثابت کرنا تھا

(۲۴) فرض کرو کہ $لا = ۲ا + \frac{۱}{ا+}\ \frac{۱}{۴ا+}\ \frac{۱}{ا+}\ \frac{۱}{۱+۴ا}$ اسواسطے $لا = ۲ا + \frac{۱}{ا+\frac{۱}{۴ا+لا-۲ا}}$

$= ۲ا + \frac{۱}{\frac{۱+لاا+ا^۲}{لا+۲ا}} = ۲ا + \frac{لا+۲ا}{۱+لاا+ا^۲} = \frac{۴ا+لا(۱+۲ا^۲)+۲ا^۳}{۱+لاا+ا^۲}$

اسواسطے $ا لا^۲ = ۴ا(ا^۲+۱)$ دفعہ ۴۰۸ دیکھو

(۲۵) $\sqrt{(۱+ا+ا^۲)} = ا + \left(\sqrt{(۱+ا+ا^۲)} - ا\right) = ا + \frac{۱+ا}{ا+\sqrt{(۱+ا+ا^۲)}}$

$\frac{ا+\sqrt{(۱+ا+ا^۲)}}{۱+ا} = ۱ + \frac{۱-\sqrt{(۱+ا+ا^۲)}}{۱+ا} = ۱ + \frac{ا}{۱+\sqrt{(۱+ا+ا^۲)}}$

$\frac{۱+\sqrt{(۱+ا+ا^۲)}}{ا} = ۱ + \frac{(۱-ا)+\sqrt{۱+ا+ا^۲}}{ا} = ۱ + \frac{۳}{۱-ا+\sqrt{(۱+ا+ا^۲)}}$

پس متقربین $\frac{ا}{۱}$ و $\frac{۱+ا}{۱}$ ہیں

(۲۶) $\frac{\sqrt{۴۸}}{۴} = ۰ + \frac{۱}{\frac{۴}{\sqrt{۴۸}}} = ۰ + \frac{۱}{\frac{\sqrt{۴۸}}{۳}} = \frac{۱}{\frac{\sqrt{۴۸}}{۳}}$

$\frac{\sqrt{۴۸}}{۳} = ۲ + \frac{۶-\sqrt{۴۸}}{۳} = ۲ + \frac{۴}{۶+\sqrt{۴۸}}$

$\frac{۶+\sqrt{۴۸}}{۴} = ۳ + \frac{۶-\sqrt{۴۸}}{۴} = ۳ + \frac{۳}{۶+\sqrt{۴۸}}$

$\frac{۶+\sqrt{۴۸}}{۳} = ۴ + \frac{۶-\sqrt{۴۸}}{۳} = ۴ + \frac{۴}{۶+\sqrt{۴۸}}$

پس خارج قسمت ۰ و ۲ و ۳ و ۴ و ۳ و ۴ ۰ ۰ ۰ ہیں۔ متقربین ہیں

$\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۳}{۷}$ و $\frac{۱۳}{۳۰}$ و $\frac{۴۲}{۹۷}$ و $\frac{۱۳۱}{۲۱۸}$ ۰ ۰ ۰ اور $۹۷ \times ۳۰ = ۲۹۱۰$ دفعہ ۴۰۸ دیکھو

(۲۷) $\sqrt{\frac{۳}{۲}} = \frac{\sqrt{۶}}{۲} = ۱ + \frac{\sqrt{۶}-۲}{۲} = ۱ + \frac{۱}{۲+\sqrt{۶}}$ اور علیٰ ہذا القیاس

پس خارج قسمت ۱ و ۴ و ۲ و ۴ و ۱ ۰ ۰ ہین

(۲۸) $\frac{۳+\sqrt{۵۷}}{۴}$ قیمت ہے اور خارج قسمت

۲ و ۱ و ۱ و ۳ و ۷ و ۳ و ۱ و ۱ و ۱ و ۳ و ۷ و ۳ ہین

(۲۹) اسواسطے کہ قیمت $\frac{۵+\sqrt{۱۲}}{۲}$ ہے اور خارج قسمت ۴ و ۳ و ۳ و ۳ ۰ ہین

اسواسطے قیمت $\frac{۵-\sqrt{۱۳}}{۲}$ ہے اور خارج قسمت ۰ و ۱ و ۲ و ۳ ۰ ۰ ۰

(۳۰) قیمت $\frac{۷+\sqrt{۱۷}}{۴}$ ہے اور خارج قسمت ۲ و ۱ و ۳ و ۱ و ۳ و ۱ مین ہین

(۳۱) $\sqrt{۴۵} = ۶ + \frac{\sqrt{۴۵}-۶}{۱} = ۶ + \frac{۹}{۶+\sqrt{۴۵}}$ پس خارج قسمت $\sqrt{۴۵}$ کے

۶ و ۱ و ۲ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱۲ ۰ ۰ ۰ مین اسیواسطے یہہ خارج قسمت $\frac{۱}{\sqrt{۴۵}}$ کے صفر سے

پہلے ہونگے اور $\frac{۱}{\sqrt{۴۵}}$ کے متقربین $\frac{۱}{۶}$ و $\frac{۱}{۷}$ و $\frac{۲}{۱۳}$ و $\frac{۷}{۴۷}$ و $\frac{۱۷}{۱۱۴}$ مین ہین

(۳۲) فرضکرو لا $= ۱ + \frac{۱}{۲+}\frac{۱}{۲+} \cdots$ تو لا $= ۱ + \frac{۱}{۲ + لا - ۱}$

اسواسطے لا − ۱ $= \frac{۱}{۱+لا}$ اسواسطے $لا^۲ - ۱ = ۱$ اسواسطے $لا^۲ = ۲$

(۳۳) فرضکرو کہ لا $= \frac{۱}{۱+}\frac{۱}{۲+}\frac{۱}{۱+}\frac{۱}{۲+} \cdots$ تو لا $= \frac{۱}{۱+\frac{۱}{لا+۲}} = \frac{لا+۲}{لا+۳}$

اسواسطے $لا^۲ + ۳لا = لا + ۲$ اسواسطے $لا^۲ + ۲لا = ۲$ وغیرہ

(۳۴) فرضکرو کہ لا $= ۱ + \frac{۱}{۲+}\frac{۱}{۳+}\frac{۱}{۱+}\frac{۱}{۲+}\frac{۱}{۳+}\frac{۱}{۱} \cdots$ تو

لا $= ۱ + \cfrac{۱}{۲ + \cfrac{۱}{۳ + \cfrac{۱}{۱ + لا - ۱}}} = ۱ + \frac{۱}{۲ + \frac{لا}{۳لا+۱}} = ۱ + \frac{۳لا+۱}{۷لا+۲} = \frac{۱۰لا+۳}{۷لا+۲}$

اسواسطے $۷لا^۲ + ۲لا = ۱۰لا + ۳$

(۳۵) فرض کرو کہ لا $= \frac{۱}{۳+}\frac{۱}{۲+}\frac{۱}{۱+}\frac{۱}{۳+}\frac{۱}{۲+}\frac{۱}{۱+} \cdots$ تو

لا $= \cfrac{۱}{۳ + \cfrac{۱}{۲ + \cfrac{۱}{لا+۱}}}$

اسواسطے $۷لا^۲ + ۱۰لا = ۳ + ۲لا$

(۳۶) فرضکرو کہ لا = ۲ + $\frac{1}{1+}$ $\frac{1}{3+}$ $\frac{1}{5+}$ $\frac{1}{1+}$ $\frac{1}{5+}$ $\frac{1}{1+}$ . . .

اور ی = $\frac{1}{5+}$ $\frac{1}{1+}$ $\frac{1}{5+}$ $\frac{1}{1+}$ . . . تو

لا = ۲ + $\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{1+ی}}}$ = ۲ + $\frac{4+3ی}{5+4ی}$ = ... اور

ی = $\frac{1}{5+\frac{1}{1+ی}}$ = $\frac{1+ی}{6+5ی}$ اول مساوات سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

ی = $\frac{11-4لا}{لا-3}$ اسکو دوسرے مساوات میں مندرج کرو تو

$\frac{لا-3}{...}$ = $\frac{8-3لا}{...}$ اسواسطے (۱۱ - ۴لا) (۳۶ - ۴لا) = (لا - ۳) (۸ - ۳لا)

چھالیسواں باب

اول مثال سے دسوین مثال تک ہم مثالوں کو دفعہ ۴۲۸ کی ترکیب سے یا دفعات ۴۳۱ اور ۴۳۲ کے ترکیب سے حل کرین مثلاً دوسرے مثال لو ۱۷ لا + ۲۳ ی = ۱۸۳ التقسیم ۱۷ پر کرو

لا + ی + $\frac{6ی}{17}$ = ۱۰ + $\frac{13}{17}$ اسے معلوم ہوا کہ $\frac{13-6ی}{17}$ ایک صحیح عدد ہو

اسکو برابر ع کے فرضکرو تو ۱۳ - ۶ی = ۱۷ع اسکو ۶ پر تقسیم کرو تو ۲ + $\frac{1}{6}$ - ی = ع + $\frac{5ع}{6}$

اسے معلوم ہوا کہ $\frac{5ع-1}{6}$ ایک صحیح ہوا سکو ق سے تعبیر کرو تو ۵ع - ۱ = ۶ق اسکو ۵ پر

تقسیم کرو تو ع - $\frac{1}{5}$ = ق + $\frac{ق}{5}$ اسے معلوم ہوا کہ $\frac{ق+1}{5}$ صحیح ہوا سکو ر سے

تعبیر کرو تو ق = ۵ر - ایس اسی سے آخر یہہ مساواتین حاصل ہونگین کہ ع = ۶ر - ۱ اور

ی = ۵ - ۱۷ر اور لا = ۴ + ۲۳ر اسسے معلوم ہوتا ہے کہ لا = ۴ اور ی = ۵ صرف یہہ صحیح مثبت قیمتین ہین

اگر دفعہ ۴۳۶ پر عمل کرین تو $\frac{23}{17}$ کی ایک کسر مسلسل بناؤ تو متقرب جو پہلی ہے $\frac{23}{17}$ سے ہے

وہ $\frac{4}{3}$ دریافت ہوگا اور ۴ × ۱۷ - ۳ × ۲۳ = - ۱ پس اسے یہہ

حل حاصل ہوگا کہ لا = ۲۳ط - ۴ × ۱۸۳ اور ی = - ۱۷ط + ۳ × ۱۸۳

اگر ط کے جگہہ ۳۲ لکھین تو لا = ۴ اور ی = ۵ حاصل ہوگا۔

جواہ فرض کسی طرح سے ادا کیا جاسے

(۱۱) فرض کرو کہ گنی کی تعداد کو لا اور پانچ پونڈ کے نوٹوں کی تعداد کو ی تعبیر کرتا ہے تو

سب کو شلنگون مین تحویل کرلین تو یہہ حاصل ہوگا کہ ۱۲۱ لا + ۱۰۰ ی = ۱۰۰۰۰ اس مساوات کا حل کلی لا = ۱۰۰ ط اور ی = ۱۰۰ - ۱۲۱ ط ہے پس چار طرح سے ادا ہوسکتا ہے اگر لا کے صفر قیمت خارج کرین اور اس قیمت کو داخل کرین تو ۵ طور سے

(۱۲) کسی ایک طور سے ادا کرین اوسکے واسطے فرضکرو کہ گنی کی تعداد لا اور سورن کی تعداد ی ہے تو ۲۱ لا + ۵ ی = ۱۲۰۰ حل کلی لا = ۵ ط اور ی = ۲۴۰ - ۲۱ ط ہے

(۱۳) کسی ایک طور سے ادا کرین اوسکی واسطے فرضکرو کہ ہاف گنی کی تعداد کو لا اور ہاف کرون کی تعداد کو ی تعبیر کرتا ہی تو ۲۱ لا + ۲۰ ی = ۱۴۰۰ اسکا حل کلی لا = ۴۰ ط اور ی = ۷۰ - ۲۱ ط

(۱۴) کسی ایک طور سے ادا کرین اوسکی واسطے فرض کرو کہ فلورن کی تعداد لا اور ہاف کرون کی تعداد ی ہی تو ۴ لا + ۵ ی = ۳۹ تو حل کلی اسکا لا = ۱ + ۵ ط اور ی = ۷ - ۴ ط

(۱۵) کسی ایک طور سے ادا کرنے کی لئی فرضکرو کہ پانچ فرنیک کے سکی لا اور ڈولر کی تعداد ی ہے تو ۸ لا + ۷ ی = ۱۸۷ اور حل کلی لا = ۵ + ۷ ط اور ی = ۲۱ - ۸ ط

(۱۶) کسی ایک طور سے ادا کرین اوسکی واسطے فرضکرو کہ ۷ شلنگ کے سکون کی تعداد لا اور ۱۷ شلنگ کے سکون کی تعداد ی ہی تو ۷ لا + ۱۷ ی = ۶۰۰ حل کلی اسکا لا = ۷۶ - ۱۷ ط اور ی = ۴ + ۷ ط

(۱۷) فرضکرو کہ لا گنی وہ دیتای اور ی ہاف کرون لیتا ہی تو ۴۲ لا - ۵ ی = ۲۱ تو حل کلی لا = ۳ + ۵ ط اور ی = ۲۱ + ۴۲ ط

(۱۸) فرضکرو کہ قرض ادا کرنے کیواسطے لا سورن دئے اور ی فرنک لئی تو ۲۰ لا - $\frac{۲}{۲۵}$ ی = ۴۴ یعنی ۲۰ لا - $\frac{۴ی}{۵}$ = ۴۴ اسواسطے ۲۵ لا - ی = ۵۵ حل کلی یہہ ہے کہ لا = ۳ + ط اور ی = ۲۰ + ۲۵ ط

(۱۹) جو حصہ ۶ پر تقسیم ہوتا ہے اوسمین فرض کرو کہ خارج قسمت لا نکلتا ہی تو یہہ حصہ ۶ لا + ۵ ہوا اور جو حصہ ۱۱ پر تقسیم ہوتا ہی اوسمین فرضکرو کہ خارج قسمت ی نکلتا ہی تو یہہ حصہ ۱۱ ی + ۴ ہوا

پس ۶لا + ۵ + ۱۱ی + ۴ = ۲۰۰ اسواسطے ۶لا + ۱۱ی = ۱۹۱ اسکا حل کلی

لا = ۳۰ - ۱۱ط اور ی = ۱ + ۶ط ہی اسواسطے ایک حصہ ۱۸۵ - ۶۶ط اور

دوسرا حصہ ۱۵ + ۶۶ط ہے

(۲۰) فرض کرو کہ لا کرون اور ی ات کرون ہین تو ۸۱/۱۰۰ لا + ۷۴۶/۱۰۰۰ ی = ۳۹

اسواسطے ۹۰لا + ۷۴ی = ۴۰۰۰ اسواسطے ۴۵لا + ۳۷ی = ۲۰۰۰

اسکا حل کلی لا = ۲۸ - ۳۷ط اور ی = ۲۰ + ۴۵ط

(۲۱) فرض کرو کہ اول رقم لا اور فرق عام ی ہی تو ن/۲ [۲لا + (ن - ۱) ی] = ن۲

اسواسطے ۲لا + (ن - ۱) ی = ۲ن اول ی = ۱ کے فرض کرکے امتحان کرو

لا = (ن + ۱)/۲ یہہ قیمت اوس صورت مین داخل ہو سکتی ہی کہ ن طاق ہو پہر فرض کرو کہ

ی = ۲ تو لا = ۱ اگر ی کو ۲ سے بڑا فرض کرین تو لا منفی ہوگا اور یہہ قیمت مساوات

مین دخل نہین رکہتی

(۲۲) فرض کرو کہ جب عدد ۲۸ پر تقسیم ہو تو خارج قسمت لا ہے

تو عدد ۲۸لا + ۲۱ ہوگا اور جب عدد ۱۹ پر تقسیم ہو تو

فرض کرو کہ خارج قسمت ی ہی تو ۱۹ی + ۱۷ عدد ہوگا پس ۲۸لا + ۲۱ = ۱۹ی + ۱۷

اسواسطے ۲۸لا - ۱۹ی = -۴ حل کلی اس مساوات کا لا = ۸ + ۱۹ط اور

ی = ۱۲ + ۲۸ط اور عدد کے صورت عامہ ۲۸لا + ۲۱ یعنی ۲۴۵ + ۲۸×۱۹ط

چہوٹے سے چہوٹا عدد ط = ۰ کے فرض کرنے سے حاصل ہوگا

(۲۳) فرض کرو کہ جب عدد ۳ پر تقسیم ہوتا ہے تو خارج قسمت لا ہی اور جب ۵ پر تقسیم ہوتا ہی [تو خارج قسمت ی ہے]

اور جب ۷ پر تقسیم ہوتا ہی تو خارج قسمت ئی ہے تو عدد = ۳لا + ۲ = ۵ی + ۴ = ۷ئی + ۶

۳لا + ۲ = ۵ی + ۴ اسواسطے ۳لا - ۵ی = ۲ تو حل کلی یہہ ہوگا کہ لا = ۴ + ۵ر

اور ی = ۲ + ۳ر اب ۳لا + ۲ = ۷ئی + ۱۶ اب اسمین جو لا کے واسطے جملہ حاصل کیا ہے

اوسے رکھو تو ۱۵ ر − ۷ ی = ۸۰− اسکا حل کلی ر = ۶ + ۷ط اور ی = ۱۴ + ۱۵ط ہے

اسے معلوم ہوا کہ ۷ ی + ۹ = ۱۰۵ط + ۱۰۴

(۲۴) فرضکرو کہ جب عدد ۲۸ و ۱۹ و ۱۵ پر تقسیم ہوتا ہے تو خارج قسمت لا اور ر اور ی نکلتے ہیں

تو عدد = ۲۸ لا + ۱۳ = ۱۹ ر + ۲ = ۱۵ ی + ۷

۲۸ لا + ۱۳ = ۱۹ ر + ۲ کا حل کلی لا = ۳ + ۱۹ ر اور ر = ۵ + ۲۸ ر

اب ۱۹ ر + ۲ = ۱۵ ی + ۷ اسمین وہ جملہ جو ر کے واسطے حاصل ہوا مندرج کرو

تو ۱۹ × ۲۸ ر + ۹۷ = ۱۵ ی اور اسکا حل کلی ر = ۱۵ط اور ی = ۶ + ۱۹ × ۲۸ط اسے معلوم ہوا کہ

۱۵ط + ۷ = ۹۷ + ۱۵ × ۱۹ × ۲۸ط یہ عام صورت عدد مطلوب کی ہے چھوٹا عدد ط = ۰ کے

فرض کرنے سے حاصل ہوتا ہے

(۲۵) ر کی قیمت ۸ سے بڑی نہیں ہوسکتی اسواسطے کہ ۲۳ × ۹ بڑا بہ نسبت ۲۰۰ کے ہے ر کے

قیمتین متواتر ۱ و ۲ و ۳ . . . ۸ مقرر کرو اور اسکی مطابق لا اور ی کی قیمتین دریافت کرو مثلاً

اگر ر = ۱ تو ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ ۱۷ لا + ۳ ی = ۱۷۷ اور حل کلی یہہ ہوگا کہ لا = ۳ط + ۱ اور

ی = ۵۹ − ۱۷ط اور صفر قیمت کو خارج کرو تو صرف تین حل اس صورت مین ہونگے

(۲۶) ی کو مساواتون سے دور کرنیسے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ ۷ لا + ۳ ر = ۱۹۰ اسکا حل کلی

لا = ۱ + ۳ط اور ر = ۵۱ − ۷ط معلوم مساواتون مین کسی مساوات لا اور ر کے قیمتون کے درج کرنے سے

ی = ۲۳ + ۱۳ط حاصل ہوگا

(۲۷) کسی طور سے ادا کرنی اوسکی واسطے شلنگ کے تعداد کو لا اور سکسپنسون کی تعداد کو ر سے تعبیر کرو

تو لا + ر سے تعداد دریافت کرون کی تعبیر ہوگی تو ۵ (لا + ر) + ۲ لا + ر = ۶۰۰ یعنی ۷ لا + ۶ ر = ۶۰۰

اوسکا حل کلی لا = ۶ط اور ر = ۱۰۰ − ۷ط

(۲۸) فرضکرو کہ گنی کی تعداد لا اور کرون کے تعداد ر اور شلنگ کے تعداد ی ہے تو یہہ حاصل ہوگا کہ

۲۱ لا + ۵ ر + ی = ۹۶ اور لا + ر + ی = ۱۴

ی کو مساواتوں سے دور کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ لا = ۴ - ط اور ر = ۵ ط اسواسطے ی = ۱۳ - ۴ ط

(۲۹) کسی طرح سے ادا کرنے کے واسطے فرض کرو کہ اف کرون کی تعداد کو لا تعبیر کرتا ہے اور فلورن کے تعداد ر تعبیر کرتا ہے تو لا + ر کرون کی تعداد کو تعبیر کریگا پس ۱۲ (لا + ر) + ۵ لا + ۴ ر = ۸۸ یعنی ۱۵ لا + ۱۴ ر = ۸۸ حل کلی اسکا لا = ۴ - ۱۴ ط اور ر = ۲ + ۱۵ ط بس صرف ایک حل مثبت صحاح کے واسطے لا = ۴ اور ر = ۲ ہے

(۳۰) فرض کرو کہ سیکڑون کے مرتبہ کے ہندسہ کو لا اور دہائی کے مرتبہ کے ہندسہ کو ر اور اکائیون کے مرتبہ مین صفر ہے اسلئے کہ عدد دس پر پورا تقسیم ہوتا ہے تو

۱۰۰ لا + ۱۰ ر - (لا + ر) = ۹۹ یعنی ۹۹ لا + ۹ ر = ۹۹ اسسے معلوم ہوا کہ لا = ۱ اور ر = ۰ یہی قیمتین ہمارے مطلب سے متعلق ہو سکتی ہین

(۳۱) فرض کرو کہ عدد قسطاس احد عشری مین (۱۱)^۲ لا + ر اور قسطاس سباعی مین (۷)^۲ ر + لا

(۱۱)^۲ لا + ر = (۷)^۲ ر + لا یعنی ۱۲۰ لا = ۴۸ ر اسواسطے ۵ لا = ۲ ر پس حل جو ہمارے مدعا سے متعلق ہے لا = ۲ اور ر = ۵ ہو سکتا ہے اسواسطے کہ لا اور ر مین سے کوئی چھ سے بڑا نہین ہو سکتا

(۳۲) فرض کرو کہ ہزارن کے مرتبہ ہندسہ لا اور دہن کے مرتبہ ہندسہ ر اور اکن کے مرتبہ ہندسہ ی ہے تو لا + ر + ی = ۲۰ اور $\frac{۱۰۰ لا + ۱۰ ر + ی - ۱۶}{۲}$ = ۱۰۰ ی + ۱۰ ر + لا

اسواسطے ۹۸ لا - ۱۹ ر - ۱۹۹ ی = ۱۶ انمین ر کو ساقط کرو تو ۸۰ لا - ۱۸۹ ی = ۲۱۶

اسواسطے ۴ لا - ۷ ی = ۸ پس جو حل ہمارے مدعا سے متعلق ہے وہ لا = ۹ اور ی = ۴ اور ر = ۷ ہے

(۳۳) فرض کرو کہ ہزارن کے مرتبہ پر ہندسہ لا اور سیکڑون کے مرتبہ پر ہندسہ ر اور دہن کے مرتبہ پر ہندسہ ی اور اکن کے مرتبہ پر ہندسہ و ہے تو

۱۰^۳ لا + ۱۰^۲ ر + ۱۰ ی + و = ۹^۳ و + ۹^۲ ر + ۹ ی + لا

اسواسطے ۹۹۹ لا + ۱۹ ر + ی - ۷۲۸ و = ۰

اب اسکو انکل سے حل کرو و کے متواتر قیمتین ۱ و ۲ و ۳ ... ۸ فرض کرو اگر و = ۱ تو

یہہ ظاہر معلوم ہوتا ہی کہ لا = ۱ کے ہونے سے کوئی حل نہین ہوگا اور وہ بڑہ جائیگا اگر
ر = ۲ تو بھی کوئی حل نہ ہوگا اسلئی لا = ۱ بہت چھوٹا حل اور لا = ۲ بہت بڑا حل ہوگا

اگر ر = ۳ تو بھی کوئی حل نہ ہوگا اسواسطے کہ لا = ۲ بہت چھوٹا حل اور لا = ۳ بہت بڑا حل ہوگا
اسطرح سی ہم کو معلوم ہوگا کہ صرف ر = ۶ ایک حل ہے اور اسسے لا = ۱۵ اور
ر = ۱۵ اور ی = ۹ ہوگا

(۳۴) فرضکرو کہ بیلون کی تعداد لا اور بھیڑون کی تعداد ر اور سورون کی تعداد ی ہی تو لا + ر + ی = ۱۰۰
اور ۱۰۰ لا + ۲۰ ر + ی = ۲۰۰۰ انمین سے ی کو دور کرو تو ۹۹ لا + ۱۹ ر = ۱۹۰۰
حل کلی لا = ۱۹ ط اور ر = ۱۰۰ - ۹۹ ط اسواسطے ی = ۸۰ ط

(۳۵) فرض کرو کہ تین کسرین $\frac{لا}{۶}$ اور $\frac{ر}{۹}$ اور $\frac{ی}{۱۸}$ سے تعبیر ہون تو
$\frac{لا}{۶} + \frac{ر}{۹} + \frac{ی}{۱۸} = ۲\frac{۲}{۳}$ اور $\frac{لا}{۶} + \frac{ی}{۱۸} = \frac{۲ر}{۹}$
اسسے معلوم ہوا کہ $\frac{۳ر}{۹} = \frac{۸}{۳}$ پس ر = ۸ اسواسطے $\frac{لا}{۶} + \frac{ی}{۱۸} = \frac{۱۶}{۹}$ اسواسطے
۳ لا + ی = ۳۲ اسکا حل کلی لا = ۵ - ط اور ی = ۱۷ + ۳ ط
اگر کسرین واجب ہون تو صرف وہی حل ہماری کام کا ہے جسمین ط = ۰

(۳۶) فرضکرو کہ لا دفعہ اول گہنٹہ اور ر دفعہ دوسرا گہنٹہ اور ی دفعہ تیسرا گہنٹہ بجا
چونکہ دوسرے گہنٹہ کے آواز ۱۸ سکنڈ بعد اور تیسرے گہنٹہ کے آواز ۲۱ سکنڈ بعد موقوف ہوئی اسلئی
۲۵ (لا - ۱) = ۲۹ (ر - ۱) - ۱۸ = ۳۳ (ی - ۱) - ۲۱ اول مساوات
۲۵ (لا - ۱) = ۲۹ (ر - ۱) - ۱۸ کو حل کرو تو اسکا حل کلی لا = ۲۰ + ۲۹ ر
اور ر = ۱۸ + ۲۵ ر اب ۲۵ (لا - ۱) = ۳۳ (ی - ۱) - ۲۱ اسمین جو لا کے واسطے حل
حاصل کیا ہی مندرج کرو تو ۲۵ × ۲۹ ر - ۳۳ ی + ۵۲۹ = ۰ اسکا حل کلی یہہ ہے
ر = ۱ + ۳۳ ط اور ی = ۳۸ + ۲۵ × ۲۹ ط

اسے معلوم ہوا کہ لا = ۹ + ۴۴ × ۲۹ × ۳ × ۳ ط اور جملہ کلی سکنڈوں ہیں جسے یہ معلوم ہوا کہ ان کی شکلیں دو ہیں جیسا کہ ۲۵ (۴۸ + ۲۹ × ۳ × ۳ × ط) ہے اور چونکہ یہ وقت نصف گھنٹہ سے کم ہے اسلئے ط = ۰

(۳۷) فرضکرو کہ اول چھڑی کے لا دین نشان اور دوسری چھڑی کے ر دین نشان کی درمیان فاصلہ دریافت کرنا ہے مشترک کسری سے م لا ر انچ فاصلہ اول چھڑی کا نشان اور ن ر انچ فاصلہ ہر دو سرے چھڑی نشان کا۔ پس او تعین فاصلہ لا ر سے ن ر انچ ہوگا یعنی م ر (لا ن سے ر م) انچ اب ہم لا ن سے ر م = ۰ کے نہیں فرض کر سکتے اسواسطے کہ اگر ایسا ہو تو ر = لا/ن تو م ن مختصر الحدین ہو جاینگے اور یہ خلاف فرض ہے لیکن ہم لا ن سے ر م = ا کے فرض کر سکتے ہیں اور واقع میں ہم بموجب دفعہ ۴۳۱ کی لا ن ۔ ر م = ا اور لا ن ۔ ر م = ۔ ا کو حل کر سکتی ہیں

تمثیلاً اگر م = ۲۵۰ اور ن = ۲۴۳ تو لا = ۱۰۷ اور ر = ۱۰۴ ایک حل مساوات لا ن ۔ ر م = ا کا اور لا = ۲۵۰ ۔ ۱۰۷ اور ر = ۲۴۳ ۔ ۱۰۴ ایک حل مساوات لا ن ۔ ر م = ۔ ا کا ہے

(۳۸) فرضکرو کہ ایک خانہ میں پانچ جلدوں کے سیٹ لا اور ۴ جلدوں کے ر سیٹ اور ۳ جلدوں کے ی سیٹ ہیں تو ۵ لا + ۴ ر + ۳ ی = ۲۰ اب اس مساوات کے حل دریافت کرنی چاہئیں ۔ اور اٹکل سے معلوم کرنا چاہئے کہ تین حل ایسے ہیں جنمیں لا کی قیمتوں کا مجموعہ ۳ اور ر کی قیمتوں کا مجموعہ ۶ اور ی کی قیمتوں کا مجموعہ ہے

(۳۹) فرض کرو کہ ح سکس پنس کی جمع ہے اور وہ لا ہاف کرون اور ر شلنگ سے ادا کی گئی ہے تو ۵ لا + ۲ ر = ح اب بموجب دفعہ ۴۳۴ کے حلوں کی تعداد ح/۲×۵ سے فرق ایک سے زیادہ نہیں رکھہ سکتی پس اب امتحان ح کی قیمتوں کا ح = ۱۰۰ شروع کرنے میں ح = ۱۰۰ کے رکھو تو بموجب صورت چہارم دفعہ ۴۳۴ کے ۱۱ حل ہونگے اب ح = ۱۰۱ کے رکھو تو بموجب صورت اول دفعہ مذکور کے ۱۰ حل ہونگے ح = ۱۰۲ رکھو تو بموجب صورت سوم ۱۱ حل ہونگے اور ح = ۱۰۳ رکھو تو بموجب صورت اول ۱۰ حل ہونگے اور ح = ۱۰۴ رکھو تو موجب صورت سوم ۱۱ حل ہونگے ح = ۱۰۵ تو جب صورت دوم ۱۱ حل ہونگے پس ح کی بڑی سے بڑی قیمت ۱۰۳ ۱۰ حل ہو سکتی ہے

(۴۰) ۳۹ مثال کی طرح عمل کرو دفعہ ۱۴۳۴ کے چار صورتون کا امتحان کرو تو صورت چہارم سے ح کے بڑی سے بڑی قیمت موافق اون حلون کے جنکے تعداد معلوم کر دریافت ہوگی اگر ہم ح = ۱۱۰ تو ٹھیک ۱۰ حل حاصل ہونگے اور ح کے قیمت اسی بڑی قیمتوں میں تو حل نہ رکھینگے مثلاً ح = ۱۱ تو بموجب صورت اول ۱۱ حل ہونگے

سینتالیسوان باب

(۱) ی (۳ لا − ۴) = ۱۴ − ۳ لا اسواسطے ی = (۱۴ + لا − ۳ لا²) / (۳ لا − ۴) = − ۱ + ۱ / (۳ لا − ۴) ۱۰ اسواسطے ۳ لا − ۴ = ± ۱ یا ± ۲ یا ± ۵ امتحان سے یہہ معلوم ہوگا کہ وہ صورتین جنمین لا اور ی قیمت صحاح ہون ۳ لا − ۴ = ۲ یا ۵ ہین

(۲) ی (لا − ۳) = ۲۹ + ۲ لا − لا² اسواسطے ی = (− لا² + ۲ لا + ۲۹) / (لا − ۳) = − لا − ۱ + ۲۶ / (لا − ۳) اسواسطے لا − ۳ = ± ۱ یا ± ۲ یا ± ۱۳ یا ± ۲۶ امتحان سے یہہ معلوم ہوگا کہ لا − ۳ = ۱ یا ۲ کے لینا چاہئے

(۳) ۱۳ کے خارج قسمت ۳ و ۱ و ۱ و ۱ و ۶ ہین اور متقربین ۳/۱ و ۴/۱ و ۷/۲ و ۱۱/۳ و ۱۸/۵ ... ہین

(۴) خارج قسمت ۱ و ۲۰ ... مثال ۱۱ باب ۴۵ اول متقرب ۱/۱ ہے

(۵) فرض کرو کہ اعداد مین سے ایک عدد م ہے تو م = ن² − ۱ = ۱۰ م² اسواسطے ن² − ۱۰ م² = ۱ پس م اور ن کی قیمتین ایسی دریافت کرو کہ شرائط مساوات کو پورا کرین ۱۰ کے متقربین دریافت کرو تو دوسرا متقرب ۱۹/۶ ہوگا پس ن = ۱۹ اور م = ۶ اسطرح سے یہہ کم سے کم حل دریافت ہوگا اور م = ۳۶۰

(۶) فرض کرو کہ چراگاہ میں لا² + ۳ مربع گز ہین اور اوسی کی بہائی کے چراگاہ مین ی² مربع تو ی² + ۱ = ۱/۲ (لا² + ۳) اسواسطے لا² − ۲ ی² = − ۱ اور ۲ کے متقربین ۱/۱ و ۳/۲ و ۷/۵ و ۱۷/۱۲ و ۴۱/۲۹ و ۹۹/۷۰ ... ہین اب چونکہ چراگاہ درمیان ۱۰ اور ۲۰ روڈ کی واقع ہے تو ۱۲۱۰ اور ۲۴۲۰ کے درمیان لا² + ۳ ہوگا اسواسطے لا = ۴۱ اور ی = ۲۹ کے ہونا چاہئے

(۷) فرض کرو کہ جذر کے صحیح حصہ کو لا اور عدد کو لا + ی تعبیر کرتا ہے تو لا + ی = ۳ لا + ۱ بلحاظ لا مساوات حل کرو تو لا = ۳ ± √(۱۳ + ۴ی) / ۲ پس ی کی متواتر قیمتین ۲ اور ۳ مقرر کیجے تو معلوم ہوگا کہ ی = ۱۱ اور ی = ۳ ایسے قیمتین ہین جو داخل ہو سکتی ہین اسواسطے کہ ۳ سے بڑا ی ہو تو لا نا ممکن ہو جائیگا

(۸) ہم کو معلوم ہے کہ ی = ب - ا لا اب ظاہر ہے کہ لا بڑا √(ب/ا) سے نہین ہو سکتا پس اسے معلوم ہوا کہ مثبت صحاح مین حل محدود ہین

(۹) مساوات درجہ دوم کو بلحاظ ی کے حل کرو تو ی = ۱/۳ [لا ± √(۸۱ - ۲۰ لا²)] پس جو لا کی قیمتین مساوات مین دخل رکہتی ہین ۰ اور ۲ ہین

(۱۰) ۲ لا² - ۹ لا ی + ۷ ی² = (۲ لا - ۷ ی) (لا - ی) پس (۲ لا - ی) (لا - ی) = ۳۸

پس جن صورتون کا امتحان کرنا منظور ہو وہ یہ ہین ۲ لا - ۷ ی = ± ۱۹ اور لا - ی = ± ۲ اور ۲ لا - ۷ ی = ± ۲ اور لا - ی = ± ۱۹ اور ۲ لا - ۷ ی = ± ۳۸ اور لا - ی = ± ۱ اور ۲ لا - ۷ ی = ± ۲ اور لا - ی = ± ۳۸

پھر امتحان کرنے سے معلوم ہوگا کہ جو صورتین مساوات مین دخل رکہتی ہین ۲ لا - ۷ ی = - ۱۹ اور لا - ی = - ۲ اور ۲ لا - ۷ ی = ۱ اور لا - ی = ۳۸

(۱۱) دفعہ ۴۴۳ مین صورت جبر یہ مین بجای ع کے ۴۲ اور بجای ق کے ۵ اور بجای ن کے ۳ رکھو

(۱۲) دفعہ ۴۴۵ کے صورت جبریہ مین بجای ع کے ۳ اور بجای ق کے ۱۱ اور بجای ن کے ۷ رکھو اور بجای م کے ۳ اور بجای ن کے ۳ رکھو مثال چھٹی دیکھو

اڑتالیسوان باب

(۱) 1/(۳ - ۲ لا) = ۱/۳ (۱ - ۲لا/۳)⁻¹ = ۱/۳ [۱ + ۲لا/۳ + (۲لا/۳)² + ... + (۲لا/۳)ⁿ + ...]

(۲) ۲ - لا - ۳ لا² = (۱ + لا) (۲ - ۳ لا) پس فرض کرو کہ

۵ - ۱۱ لا / (۱ + لا)(۲ - ۳ لا) = ط/(۱ + لا) + ص/(۲ - ۳ لا)

اسواسطے ۵ – ۱۰لا = ط (۲ – ۳لا) + ص (۱ + لا) = ۲ط + ص – (۳ط – ص) لا

پس ۵ = ۲ط + ص اور ۱۰ = ۳ط – ص اسواسطے ط = ۳ اور ص = –۱ تو

۳/(۱+لا) = ۳ [۱ – لا + لا^۲ – . . . (–۱)^ن لا^ن + . .]

–۱/(۲–۳لا) = –۱/۲ (۱ – ۳لا/۲)^{–۱} = –۱/۲ [۱ + ۳لا/۲ + (۳لا/۲)^۲ + . . . + (۳لا/۲)^ن + . .]

(۳) فرض کرو کہ (۳لا – ۲)/((لا–۱)(لا–۲)(لا–۳)) = ط/(لا–۱) + ص/(لا–۲) + س/(لا–۳) اسواسطے

۳لا – ۲ = ط(لا–۲)(لا–۳) + ص(لا–۱)(لا–۳) + س(لا–۱)(لا–۲) = لا^۲(ط+ص+س)

– لا(۵ط + ۴ص + ۳س) + ۶ط + ۳ص + ۲س پس ۰ = ط+ص+س اور ۳ = –(۵ط+۴ص+۳س) ۲–

(۵)* ۱/(۱–۲لا+لا^۲) = ۱/(۱–لا)^۲ = (۱–لا)^{–۲} دفعہ ۵۲۱ دیکھو

(۶) (۵+۶لا)/(۱–۳لا)^۲ = (۵+۶لا)(۱–۳لا)^{–۲} دفعہ ۵۲۱ دیکھو

(۱–۳لا)^{–۲} = ۱ + ۲(۳لا) + . . . + ن(۳لا)^{ن–۱} + (ن+۱)(۳لا)^ن + . . .

اسکو ۵ + ۶لا مین ضرب دو اور لا^ن کے سر لو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

۵(ن+۱)۳^ن + ۶ن ۳^{ن–۱} یعنے (۷ن+۵) ۳^ن

(۷) (۱+۴لا+لا^۲)/(۱–لا)^۴ = (۱+۴لا+لا^۲)(۱–لا)^{–۴} دفعہ ۵۲۱ کے طرح عمل کرنے سے

(۱–لا)^{–۴} = ۱ + ۴لا + . . . + ((ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)/۳!) لا^ن + . . .

اب اسکو ۱ + ۴لا + لا^۲ مین ضرب دو اور لا^ن کا سر لو تو ہم کو یہہ حاصل ہوگا

((ن+۱)(ن+۲)(ن+۳))/۳! + ۴(ن(ن+۱)(ن+۲))/۳! + ((ن–۱)ن(ن+۱))/۳!

اور یہہ (ن+۱)^۳ کے طرف تحویل ہو سکتی ہے

(۸) دفعہ ۵۳۶ کی طرح اول رقم ۱ ہے اور دوسرے رقم لا ہے اور قوا لا کے امثال متواتر موافق قاعدہ کے دریافت ہو سکتی ہین کہ د ن – ۲د ن–۱ + د ن–۲ = ۰

(۹) دفعہ ۵۳۶ کی طرح اول رقم ۱ ہے دوسرے رقم ۷لا ہے اور قوا لا کے امثال متواتر اس قاعدہ سے دریافت ہوتے ہین کہ د ن – ۲د ن–۱ + ۳د ن–۲ = ۰

= ۶ط + ۳ص + ۲س اسواسطے ط = ۱/۲ اور ص = –۴ اور س = ۷/۲ (۴) فرض کرو کہ لا/((۱–لا)(۱–ع لا)) = ط/(۱–لا) + ص/(۱–ع لا) اسواسطے لا = ط(۱–ع لا) + ص(۱–لا) اور ۰ = ط + ص اسواسطے

ط = ۱/(۱–ع) اور ص = –۱/(۱–ع) *

(۱۰) تقسیم کرنے سے $\frac{1-لا^2}{2-2لا-لا^2} = لا-2+\frac{5-6لا}{2-2لا-لا^2} = لا-2+\frac{\frac{5}{2}-3لا}{1-لا-\frac{1}{2}لا^2}$

دوسرے کسر بموجب دفعہ ۴۵۳ کے پھیل سکتی ہے اور اول رقم $\frac{5}{2}$ ہے اور دوسرے رقم $-\frac{1}{2}لا$ ہے اور قواء لا کے اور امثال متواتر اس قاعدہ سے دریافت ہوسکتی ہیں کہ $د_ن - د_{ن-1} - \frac{1}{2}د_{ن-2} = 0$

(۱۱) $\frac{1}{ا^2+الا+لا^2} = \frac{1}{ا^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{لا}{ا}+\frac{لا^2}{ا^2}}$ بموجب دفعہ ۴۵۳ کے $\frac{1}{1+\frac{لا}{ا}+\frac{لا^2}{ا^2}}$ کے اول رقم ۱ ہے اور دوسرے رقم $-\frac{لا}{ا}$ ہے اور قواء لا کے امثال متواتر اس قاعدہ سے دریافت ہوتے ہیں کہ $د_ن + \frac{1}{ا}د_{ن-1} + \frac{1}{ا^2}د_{ن-2} = 0$

(۱۲) فرضکرو کہ صورت مفصلہ مطلوب $د_0 + د_1 لا + د_2 لا^2 + د_3 لا^3 + \dots$ ہے تو

$$1 = (1 - ع لا + ع لا^2 - لا^3)(د_0 + د_1 لا + د_2 لا^2 + د_3 لا^3 + \dots)$$

اب د۰ اور د۱ اور د۲ وغیرہ کے دریافت کرنے کے واسطے $1 = د_0$ اور $0 = د_1 - ع د_0$ اور $0 = د_2 - د_1 ع + د_0 ع$ اور اعلے درجہ کے امثال متواتر اس قانون سے دریافت ہونگے کہ

$$د_ن - ع د_{ن-1} + ع د_{ن-2} - د_{ن-3} = 0$$

(۱۳) رویں رقم $\frac{ا^{ر-1}لا}{(1+ا^{ر-1}لا)(1+ا^ر لا)}$ ہے اسکو فرضکرو $= \frac{ط}{1+ا^{ر-1}لا} + \frac{ص}{1+ا^ر لا}$ تو

$$ا^{ر-1}لا = ط(1+ا^ر لا) + ص(1+ا^{ر-1}لا) = ط+ص+ا^{ر-1}(ط ا+ص)لا$$

اسواسطے $ط+ص=0$ اور $ط ا+ص=1$ پس $ط=\frac{1}{ا-1}$ اور $ص=-\frac{1}{ا-1}$ اور جب سلسلہ کی ہر ایک رقم کی تحلیل کیجاوے تو سب رقمیں آپسمیں ایک دوسرے کو محو کرنے سے فنا ہوجاوینگے الا اول اور آخر رقم

(۱۴) رویں رقم $\frac{ا^{ر-1}لا(1-ا^ر لا)}{(1+ا^{ر-1}لا)(1+ا^ر لا)(1+ا^{ر+1}لا)}$ ہے فرض کرو کہ یہہ $= \frac{ط}{1+ا^{ر-1}لا} + \frac{ص}{1+ا^ر لا} + \frac{س}{1+ا^{ر+1}لا}$ تو موافق سابق کے عمل کرنے سے

$$ا^{ر-1}لا(1-ا^ر لا) = ط+ص+س + ا^{ر-1}لا\left[ط(ا+ا^2)+ص(1+ا^2)+س(1+ا)\right] + ا^{2ر-1}لا^2\left[ط ا^3+ص ا+س\right]$$

اسواسطے $ط+ص+س=0$ اور $ط(ا+ا^2)+ص(1+ا^2)+س(1+ا)=1$ اور $ط ا^3+ص ا+س=-ا$ پس

$ط=س=-\frac{1}{(ا-1)^2}$ اور $ص=\frac{2}{(ا-1)^2}$ پس جب سلسلہ کے ہر ایک رقم کے تحلیل

تین تو تین ہونگی تو رقمین فنا ہو جاینگے الا دو اول مین اور دو آخر مین

(۱۵) مثال ۷ مین ہم دریافت کرتے ہین کہ ن وین رقم صورت مفصلہ مین یہہ ہے کہ
[ا دن-۱ + ب دن-۲ + ح دن-۳ + د دن-۴ + ش دن-۵] لا^ن-۱ یہان
دن-۱ = ن (ن+۱) (ن+۲) (ن+۳) / ۴! اور دن-۱ سے دن-۲ اسطرح حاصل ہوتا ہے
کہ ن کو ن - ۱ سے تبدیل کر دین اور
دن-۲ سے دن-۳ حاصل ہو سکتا ہے اور علی ہذا القیاس پس معلوم ہوا کہ ۴! مین ضرب دینے سے
پہلا رتبا طا اور حالت مین کہ ن کے واسطے مثبت صحیح قیمتین فرض کرین قائم ہوتا ہے کہ
ن^۴ ۴! = ا (ن^۴ + ۶ ن^۳ + ۱۱ ن^۲ + ۶ ن) + ب (ن^۴ + ۲ ن^۳ - ن^۲ - ۲ ن)
+ ح (ن^۴ - ۲ ن^۳ - ن^۲ + ۲ ن) + د (ن^۴ - ۶ ن^۳ + ۱۱ ن^۲ + ۶ ن)
+ ش (ن^۴ - ۱۰ ن^۳ + ۳۵ ن^۲ - ۵۰ ن + ۲۴)

مختلف ن کے قوا کے امثال کو برابر لکھو تو ہم کو ابتدا النظر مین یہہ معلوم ہوگا کہ ش = ۰ اور
ا اور ب اور ح اور د کے دریافت کرنے کے لئے ۰ = ۶ ا - ۲ ب + ۲ ح - ۶ د اور
۰ = ۱۱ ا - ب - ح + ۱۱ د اور ۰ = ۶ ا + ۲ ب - ۲ ح - ۶ د اور
۴! = ا + ب + ح + د

(۱۶) فرض کرو کہ کسر مفروضہ برابر ط/(لا - ا) + ص/(لا - ب) + س/(لا - ح) + ۰۰۰ تو یہہ حاصل ہوگا کہ
لا^ع = ط (لا - ب) (لا - ح) ۰۰۰ + ص (لا - ا) (لا - ح) ۰۰۰ + س (لا - ب) (لا - ا) ۰۰۰
چونکہ یہہ ایک مساوات متطابقہ ہے تو ہم کو اختیار ہے کہ لا کے واسطے کوئی قیمت فرض کرین اسلئے ہم بجای لا کے
ا رکھتے ہین تو ا^ع = ط (ا - ب) (ا - ح) ۰۰۰ (کہ ارقام جنمین ص اور س شامل ہین
فنا ہو جاینگے) اسسے ط دریافت ہوتا ہے اور اسیطرح اگر بجای لا کے ب رکھین تو ص دریافت ہوگا
پس اصل کسر بطور تطابق کے برابر ط/(لا - ا) + ص/(لا - ب) + ۰۰۰ کے لا کے قیمت جو ہم چاہین فرض کرسکتے ہین
پس لا = ۰ کے رکھو تو ۰ = ا^(ع-۱) / ((ا - ب) (ا - ح)) + ب^(ع-۱) / ((ب - ا) (ب - ح)) + ۰۰۰

بموجب دفعہ ۴۴۸ کے یہہ ضرور ہونی چاہیئے کہ ع کم ن سے ہو

اونچاسوان باب

(۱) اول ہم ع اور ق کو ان مساواتون سے دریافت کرتے ہین کہ ۲۱ = ۹ ع + ۴ ق اور ۵۱ = ۲۱ ع + ۹ ق پس ع = ۵ اور ق = ۶- تو بموجب دفعہ ۴۵۶ کے جملہ مطلوب $\frac{\text{۴} - \text{۱۱ لا}}{\text{۱} - \text{۵ لا} + \text{۶ لا}^{\text{۲}}}$ ہوا اسکو فرض کرو کہ $= \frac{\text{ط}}{\text{۱} - \text{۲ لا}} + \frac{\text{ص}}{\text{۱} - \text{۳ لا}}$ تو ط = ۳ اور ص = ۱

(۲) ۸۹ = ۱۱ ع + ق اور ۶۵۹ = ۸۹ ع + ۱۱ ق پس ع = ۱۰ اور ق = ۲۱ پس جملہ مطلوب $\frac{\text{۱} + \text{لا}}{\text{۱} - \text{۱۰ لا} + \text{۲۱ لا}^{\text{۲}}}$ اور یہہ برابر $\frac{\text{۲}}{\text{۱} - \text{۷ لا}} - \frac{\text{۱}}{\text{۱} - \text{۳ لا}}$ کے دریافت ہوگا

(۳) ۱۱ = ۳ ع + ق اور ۴۳ = ۱۱ ع + ۳ ق پس ع = ۵ اور ق = ۴- پس جملہ مطلوب $\frac{\text{۱} - \text{۲ لا}}{\text{۱} - \text{۵ لا} + \text{۴ لا}^{\text{۲}}}$ اور یہہ $= \frac{\text{۱}}{\text{۳}} \cdot \frac{\text{۱}}{\text{۱} - \text{لا}} + \frac{\text{۲}}{\text{۳}} \cdot \frac{\text{۱}}{\text{۱} - \text{۴ لا}}$

(۴) $\frac{\text{۱}}{\text{۱} - \text{لا}}$ کی صورت مفصلہ اگر لا ایک سے چھوٹا ہو نضمامی ہی اور $\frac{\text{۱}}{\text{۱} - \text{۴ لا}}$ کی صورت مفصلہ اگر ۴ لا چھوٹا ایک سے ہو تو انضمامی ہی پس دونو صورت مفصلہ اگر ۴ لا چھوٹا ایک سے ہو انضمامی ہین

(۵) ۳۲ = ۱۱ ع + ۳ اور ۸۴ = ۳۲ ع + ۱۱ ق پس ع = ۴ اور ق = ۴- سے معلوم ہوا $\frac{\text{۳} - \text{۱۱ لا}}{\text{۱} - \text{۴ لا} + \text{۴ لا}^{\text{۲}}}$ کے صورت مفصلہ مین یعنی (۳ - لا) (۱ - ۲ لا)$^{\text{۲-}}$ کے صورت مفصلہ مین لا$^{\text{ن}}$ کا سر رقم عام ہے اور اسمین یہہ سر ۳ (ن + ۱) ۲$^{\text{ن}}$ - ن ۲$^{\text{ن-۱}}$ ہے ۴۸ باب ۶ مثال دیکھو

(۶) اول ہم رقم عام دریافت کرتے ہین اول ہم فرض کرتے ہین کہ سلسلہ ایک سلسلہ مدورہ ہی اور اوسکا قسطاس ۱ - ع - ق ہی اور ع اور ق دریافت کرنے کے لئے ۱۷ = ۵ ع + ق اور ۵۳ = ۱۷ ع + ۵ ق پس ع = ۴ اور ق = ۳- اور ہم یہہ دیکھتے ہین کہ یہہ قانون اور آگے کی دو رقمون مین درست ہوتا ہی پس $\frac{\text{۱} + \text{لا}}{\text{۱} - \text{۴ لا} + \text{۳ لا}^{\text{۲}}}$ کے صورت مفصلہ مین لا$^{\text{ن}}$ کا رقم عام ہے اور یہہ کسر $= \frac{\text{۲}}{\text{۱} - \text{۳ لا}} - \frac{\text{۱}}{\text{۱} - \text{لا}}$ پس (ن + ۱) وین رقم ۲ × ۳$^{\text{ن}}$ - ۱ ہے اور اول ن رقمون کا حاصل جمع آسانی سے دریافت ہوسکتا ہے

تحلیل کرو اور جمع کرو تو سب رقمیں آپس میں ایک دوسرے کو فنا کر دینگی مگر اول کی تین رقمیں اور آخر کے تین رقمیں باقی رہینگے

(۶) ن ویں رقم = ن / ن(ن+۲)(ن+۴) = (ن+۱)(ن+۳) / ن(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)(ن+۴)

= [ن(ن+۴) + ۳] / ن(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)(ن+۴) = ۱ / ن(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)

+ ۳ / ن(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)(ن+۴)

دفعہ ۳۴۶ کے موافق جمع کرو تو ۱/۱۲ − ۱ / ۲(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳) + ۳/۹۶ − ۳ / ۴(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)(ن+۴)

(۷) ن ویں رقم = (۳ن+۱) / (ن+۱)(ن+۲)(ن+۳) = ۳ / (ن+۲)(ن+۳) − ۲ / (ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)

یعنی مجموعہ ۱ − ۳/(ن+۳) − ۲ [۱/۱۲ − ۱ / ۲(ن+۲)(ن+۳)] یعنی ۵/۶ − ۳/(ن+۳) + ۱ / (ن+۲)(ن+۳)

(۸) اول رقم ۱ ہے دوسری رقم ۱+۲ ہے اور تیسری رقم ۱+۲+۳ اور چوتھی رقم ۱+۲+۳+۴ ہے اور علی ہذا القیاس ن ویں رقم ۱+۲+۳+ . . . +ن ہے یعنے ن(ن+۱)/۲ اس واسطے ن رقموں کا مجموعہ ن(ن+۱)(ن+۲) / ۲×۳ بموجب مثال اول

(۹) ن کے جگہ ۲م رکھو تو ہم کو مجموعہ اس سلسلہ کا دریافت کرنا ہے کہ

۱×۲م + ۲(۲م−۱) + ۳(۲م−۲) + . . . + م(۲م − (م−۱))

یعنی ۲م [۱+۲+۳+ . . . +م] − [۱×۲ + ۲×۳ + . . . + (م−۱)م] پس

مجموعہ = ۲م م(م+۱)/۲ − (م−۱)م(م+۱)/۳ = م(م+۱)(۲م+۱)/۳ = ن(ن+۱)(ن+۲)/۱۲

(۱۰) سلسلہ = ن ق^۲ + ۲ق [۱+۲+ . . . +(ن−۱)] + ۱^۲ + ۲^۲ + . . . + (ن−۱)^۲

یعنے ن ق^۲ + (ن−۱) ن ق + (ن−۱) ن (۲ن−۱) / ۶

(۱۱) فرض کرو کہ ص = ۱^۲ + ۲^۲ لا + ۳^۲ لا^۲ + . . . + ن^۲ لا^(ن−۱) ضرب لا میں کرو اور تفریق کرو پس

ص(۱−لا) = ۱ + ۳لا + ۵لا^۲ + . . . + (۲ن−۱) لا^(ن−۱) − ن^۲ لا^ن

اس واسطے بموجب دفعہ ۳۴۳ کے ص = [۱ − (۲ن−۱) لا^ن] / (۱−لا)^۲ + ۲لا(۱ − لا^(ن−۱)) / (۱−لا)^۳ − ن^۲ لا^ن / (۱−لا)

ارقام کو جمع کرو

(۱۲) اول رقم $ن ا^{ن-۱} ر$ اور دوسری رقم $ن(ن-۱) ا^{ن-۱} ب ر^۲$ اور تیسری رقم $\frac{ن(ن-۱)}{۱×۲} ... ا^{ن-۲} ب^۲ ر^۳$ اور علی ہذا القیاس پس مجموعہ $= ن ا ر (ا + ب ر)^{ن-۱}$

(۱۳) $\frac{لا}{(۱-لا)^۲ - ح لا} = \frac{لا}{(۱-لا)^۲}\left[۱ - \frac{ح لا}{(۱-لا)^۲}\right]^{-۱} = \frac{لا}{(۱-لا)^۲}\left[۱ + \frac{ح لا}{(۱-لا)^۲} + \frac{ح^۲ لا^۲}{(۱-لا)^۴} + \cdots\right]$

اب رقموں سے ہر ایک رقم کو جدا جدا پھیلانا چاہیے اور $لا^ن$ کا سر ہر ایک میں سے منتخب کرنا چاہیے صورت $\frac{لا}{(۱-لا)^۲}$ کے صورت مفصلہ میں $لا^ن$ کا سر وہی ہے جو $(۱-لا)^{-۲}$ کے صورت مفصلہ میں $لا^{ن-۱}$ کا سر یعنی ن بموجب دفعہ ۵۲۱ ہے اور $\frac{ح لا^۲}{(۱-لا)^۴}$ کے صورت مفصلہ میں $لا^ن$ کا سر وہی ہے جو $لا^{ن-۲}$ کا سر $(۱-لا)^{-۴}$ کے صورت مفصلہ میں ہے یعنی $\frac{ح(ن-۱)ن(ن+۱)}{\lfloor ۳}$ بموجب دفعہ ۵۲۱ اور علی ہذا القیاس

(۱۴) $\frac{لا(۱-د لا)}{(۱-لا)(۱-د لا - ب لا^۲)} = \frac{لا}{۱-لا}\left(۱-\frac{ب لا^۲}{۱-د لا}\right)^{-۱}$ دوسرے جزو ضربی کو جو $\frac{ب لا^۲}{۱-د لا}$ میں پھیلاؤ تو وہ رقم جس میں $ب^ن$ ہو یہ جملہ ہوگا $\frac{لا}{۱-لا}\frac{ب^ن لا^{۲ن}}{(۱-د لا)^ن}$ پس $لا^{ن}$ کا سر $لا^{-۱}$ کا سر صورت مفصلہ $\frac{ب^ن}{۱-لا} \times \frac{۱}{(۱-د لا)^ن}$ میں ہوگا یعنی صورت مفصلہ $ب^ن(۱-لا)^{-۱}(۱-د لا)^{-ن}$ میں ہوگا یعنی حاصل ضرب $ب^ن\left[۱ + لا + لا^۲ + لا^۳ \cdots\right]\left[۱ + ن د لا + \frac{ن(ن+۱)}{۱×۲} د^۲ لا^۲ + \cdots\right]$

(۱۵) $\frac{ع_۱}{ع_۰} = ن$ اور $\frac{۲ع_۲}{ع_۱} = ن-۱$ اور $\frac{۳ع_۳}{ع_۲} = ن-۲$ ان رقموں کا مجموعہ $\frac{ن(ن+۱)}{۲}$ اور

نیز $ع_۰ + ع_۱ = \frac{ع_۱}{ن} + ع_۱ = \frac{ن+۱}{ن} ع_۱$

$ع_۱ + ع_۲ = \frac{۲ع_۲}{ن-۱} + ع_۲ = \frac{ن+۱}{ن-۱} ع_۲$

$ع_۲ + ع_۳ = \frac{۳ع_۳}{ن-۲} + ع_۳ = \frac{ن+۱}{ن-۲} ع_۳$

اور علی ہذا القیاس پس حاصل ضرب $(ن+۱)^ن \frac{ع_۱ ع_۲ \cdots ع_ن}{\lfloor ن}$

فرض کرو کہ $مح_ن = ع_۱ - \frac{ع_۲}{۲} + \frac{ع_۳}{۳} - \cdots + \frac{(-۱)^{ن-۱} ع_ن}{ن}$

$= ن - \frac{ن(ن-۱)}{۲\lfloor ۲} + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۳\lfloor ۳} - \cdots$

ن کو ن+۱ سے تبدیل کرو تو $مح_{ن+۱} = ن+۱ - \frac{(ن+۱)ن}{۲\lfloor ۲} + \frac{(ن+۱)ن(ن-۱)}{۳\lfloor ۳} - \cdots$

اس سے معلوم ہوا کہ تفریق کرنے سے $مح_{ن+۱} - مح_ن = ۱ - \frac{ن}{\lfloor ۲} + \frac{ن(ن-۱)}{\lfloor ۳} - \cdots = \frac{۱}{ن+۱}\left[۱-(۱-۱)^{ن+۱}\right] = \frac{۱}{ن+۱}$

پس مج$_{ن+۱}$ = مج$_ن$ + $\frac{ن}{ن+۱}$ لیکن مج$_۱$ = ۱ پس مج$_۲$ = ۱ + $\frac{۱}{۲}$ اور مج$_۳$ = ۱ + $\frac{۱}{۲}$ + $\frac{۱}{۳}$ اور

(۱۷) $\left(\frac{۱}{۱-لا} - ۱\right)^ن = \frac{۱}{(۱-لا)^ن} - \frac{ن}{۱}\cdot\frac{۱}{(۱-لا)^{ن-۱}} + \frac{ن(ن-۱)}{۲\times۱}\cdot\frac{۱}{(۱-لا)^{ن-۲}}$

بائین طرف جو ارقام ہین اونکو تبلا دو اور لا^ع کے سر منتخب کرو تو جملہ معلوم حاصل ہوگا

اور $\frac{لا^ن}{(۱-لا)^ن}$ کے صورت مفصلہ مین اگر ن بڑا ع سے ہے تو کوئی رقم

ایسے نہ ہوگی جسمین لا^ع شامل ہو پس جملہ مفروض صفر ہوگا

(۱۸) ن = ۹ صورت جبریہ (۱) دفعہ ۶۶۷ مین رکہو تو یہہ حاصل ہوگا کہ $\frac{۹\times۱۰\times۱۱}{۶}$

(۱۹) اب یہہ تو وہ اون دو تو دون کا فرق ہے جسکے قاعدہ کے ہر یک ضلع مین

۱۵ گولیان ہین اور سر کے اوپر ۱۰ گولیان اصلی تعداد مطلوب $\frac{۱۴\times۱۴\times۱۵}{۶} - \frac{۱۲\times۱۱\times۱۰}{۶}$

(۲۰) چوٹی کی تہ پر م ن گولے ہین اور دوسرے تہ پر (م+۱)(ن+۱) گولے اور اوسکی بعد تہ پر

(م+۲)(ن+۲) گولے اور علی ہذا القیاس مجموعہ اس سلسلہ کے ع رقموں کا

ع م ن + (م+ن) [۱ + ۲ + ۰۰ + (ع-۱)] + $۱^۲ + ۲^۲ + ۰۰ + (ع-۱)^۲$ یعنے

ع م ن + (م+ن) $\frac{ع(ع-۱)}{۲}$ + $\frac{ع(ع-۱)(۲ع-۱)}{۶}$ ان رقموں کو جمع کرو

(۲۱) یہہ ایک مثال دفعہ ۶۷۱ کی ہے یہان ر = ۴ اسسے ہم کو اول صورت جبریہ

مجموعہ کے لئے دریافت ہوتی ہے اور جب نفس الامر مین ضرب دین تو ہم ثابت کرینگے کہ

دوسرے صورت جبریہ برابر پہلی صورت جبریہ کی ہے

(۲۳) فرض کرو کہ (۱+لا)(۱+ح لا)(۱+ح^۲ لا) ۰۰ = ۱ + ط$_۱$ لا + ط$_۲$ لا^۲ + ط$_۳$ لا^۳ + ۰۰

اسمین ط$_۱$ و ط$_۲$ ۰۰ مین لا شامل نہین ہے اب لا کو ح لا سے تبدیل کرو تو نتیجہ حاصل ہوگا

(۱+لا) [۱ + ط$_۱$ ح لا + ط$_۲$ ح^۲ لا^۲ + ط$_۳$ ح^۳ لا^۳ + ۰۰] = ۱ + ط$_۱$ لا + ط$_۲$ لا^۲ + ۰۰

اب لا کے سرون کو جو دونو طرف ہین اسمین برابر لکہو تو ط$_ر$ ح^ر + ط$_{ر-۱}$ ح$^{ر-۱}$ = ط$_ر$

یعنے ط$_ر$ (۱ - ح^ر) = ط$_{ر-۱}$ ح$^{ر-۱}$ اب ر کے جگہ متواتر ۱ و ۲ و ۳ ۰۰۰ رکہو

تو متواتر ہم کو ط$_۱$ و ط$_۲$ و ط$_۳$ ۰۰ دریافت ہونگے اور یہہ خیال مین رکہین کہ ط$_۰$ بجائے ۱ کے ہے

(۴۴) فرض کرو کہ (۱ + لا)^ن [۱ + ط۱ لا/۲ + ط۲ لا²/۲ + ۰۰۰] = ۱ + ا۱ لا + ط۲ لا² + ۰۰۰
لا کے امثال جو دونو طرف ہوں اونکو آپس مین برابر لکھو پس اگر ر کم ۲ سے نہ ہو تو ہم کو یہہ حاصل ہوگا ط ر-۱/۲ + ط ر-۲/۲² + ۰۰۰ + ط ر-ر/۲^ر = ط ر اب لا کے امثالون کو مساوی لکھی سے ط۱/۲ + ۲ = ط۱ پس ط۱ = ۴ پس متواتر ہم کو ط۲ و ط۳ ۰۰۰ دریافت ہونگے

اکیاونوان باب

(۱) فرض کرو کہ ا + ب > ح اور ح + ا > ب
ح (ا + ب) > ح² اور ا (ب + ح) > ا² اور ب (ح + ا) > ب² جمع کرو تو
۲ (ا ب + ب ح + ح ا) > ا² + ب² + ح²

(۲) ۲ (ل لَ + م مَ + ن نَ) = ل² + م² + ن² + لَ² + مَ² + نَ² − (ل − لَ)² − (م − مَ)² − (ن − نَ)²
پس ل لَ + م مَ + ن نَ > ۱

(۳) تحویل و اختصار کرنے سے یہہ صورت پیدا ہوگی ا² + ب² + ح² > اب + ب ح + ح ا اب
ا² + ب² > ۲ ا ب اور ب² + ح² > ۲ ب ح اور ح² + ا² > ۲ ح ا جمع کرو تو
۲ (ا² + ب² + ح²) > ۲ (ا ب + ب ح + ح ا)

(۴) ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی ا^(۳/۲) + ب^(۳/۲) > (ا ب)^(۱/۲) [ا^(۱/۲) + ب^(۱/۲)] تقسیم ا^(۱/۲) + ب^(۱/۲) پر کرو تو ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی کہ ا − (ا ب)^(۱/۲) + ب > (ا ب)^(۱/۲) یعنے ا + ب > ۲ (ا ب)^(۱/۲) اور یہہ ظاہر ہے

(۵) ا² + ب² > ۲ ا ب اسواسطے ح (ا² + ب²) > ۲ ا ب ح اسی طرح ا (ب² + ح²) > ۲ ا ب ح
اور ب (ح² + ا²) > ۲ ا ب ح پس جمع کرو تو چوتھی مثال کی طرح ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ
ا ب (ا + ب) > ا³ + ب³ اور ب ح (ب + ح) > ب³ + ح³ اور ح ا (ح + ا) > ح³ + ا³

(۶) مثال پنجم مین غیر مساوات کے ہر یک طرف پر ۲ ا ب ح کے زیادہ کرنے سی مطلب حاصل ہو جاتا ہے
یا اسطرح ا + ب > ۲ √(ا ب) اور ب + ح > ۲ √(ب ح) اور ح + ا > ۲ √(ح ا)
تو ضرب دو

(۷) لا² − ۸لا + ۲۲ = (لا − ۴)² + ۶ یہہ چھ سے کم نہیں ہو سکتا

(۸) ۲لا³ − لا² − لا − ۱ = ۲(لا³ − لا) + لا − ۱ = (لا − ۱)[۲لا(لا + ۱) + ۱] یہہ مثبت اگر لا > ۱ اور منفی ہی اگر لا < ۱

(۹) لا + ۱/(ن لا) − (۱ + ۱/ن) = لا − ۱ + ۱/ن (۱/لا − ۱) = ۱/لا (لا − ۱)(لا − ۱/ن)
یہہ مثبت ہے اگر لا > ۱ اور منفی ہے اگر لا < ۱/ن

(۱۰) (ا + لا)(ب + لا)/لا = اب/لا + ا + ب + لا = (√(اب/لا) − √لا)² + ا + ب + ۲√(اب)
پس قیمت کم از کم جب ہوگی کہ (√(اب/لا) − √لا)² = ۰ یعنے جب لا = √(اب)

(۱۱) فرض کرو کہ طاق عدد صحیح ۲ن + ۱ ہو اور دو حصوں میں سے ایک حصہ لا ہو تو دوسرا حصہ ۲ن + ۱ − لا ہوگا اور حاصل ضرب لا(۲ن + ۱ − لا) اسکو ر سے تعبیر کرو تو
لا² − (۲ن + ۱)لا + ر = ۰ اسواسطے لا = [۲ن + ۱ ± √((۲ن + ۱)² − ۴ر)]/۲
علامت جذر کے اندر جو مقدار ۴(ن² + ن − ر) ہی پس ر کے بڑی سے بڑی ممکن قیمت ن² + ن ہی کیونکہ ر صحیح ہے اس سے معلوم ہوتا ہے کہ لا = ن یا ن + ۱ پس دو حصے ن اور ن + ۱ ہونگے

(۱۲) √(ا² − ب²) + √(۲اب − ب²) > ا ہی اگر √(۲اب − ب²) > ا − √(ا² − ب²)
یعنی اگر ۲اب − ب² > ا² + ا² − ب² − ۲ا√(ا² − ب²) یعنی اگر ا√(ا² − ب²) > ا² − اب
یعنی ا² − ب² > (ا − ب)² یعنے اگر ا + ب > ا − ب اور یہہ ظاہر ہے

(۱۳) چونکہ ا و ب و ح سلسلہ موسیقیہ میں ہیں تو ا = ب ح/(۲ح − ب) اور چونکہ ب و ح و د سلسلہ موسیقیہ میں ہیں تو د = ب ح/(۲ب − ح) پس
ا + د − (ب + ح) = ب ح/(۲ح − ب) + ب ح/(۲ب − ح) − (ب + ح)
= ب ح(ب + ح)/((۲ح − ب)(۲ب − ح)) − (ب + ح) = (ب + ح)[ب ح − (۲ح − ب)(۲ب − ح)]/((۲ح − ب)(۲ب − ح))
= ۲(ب + ح)(ب − ح)²/((۲ح − ب)(۲ب − ح))
یہہ مثبت ہی اسواسطے کہ ۲ح − ب اور ۲ب − ح مثبت ہیں کیونکہ ا اور د مثبت ہیں بموجب فرض کے

(۱۴) دو مقداروں ا اور ح میں سے فرض کرو کہ ا بڑا ہے

$ا^ن + ح^ن - ۲ ب^ن = ا^ن - ب^ن - (ب^ن - ح^ن)$

$(ا-ب)[ا^{ن-۱} + ا^{ن-۲}ب + ...] - (ب-ح)[ح^{ن-۱} + ح^{ن-۲}ب + ...]$

اب یہہ جملہ مثبت ہے اسواسطے کہ ا - ب > ب - ح بموجب دفعہ ۴۷۹ کے اور

$ا^{ن-۱} + ا^{ن-۲}ب + ...$ ظاہرا بڑا $ح^{ن-۱} + ح^{ن-۲}ب + ...$

(۱۵) $\frac{لا + ا}{\sqrt{(لا^۲ + ا^۲)}}$ > یا < $\frac{لا + ب}{\sqrt{لا^۲ + ب^۲}}$ جیسا کہ $\frac{(لا+ا)^۲}{لا^۲+ا^۲}$ > یا < $\frac{(لا+ب)^۲}{لا^۲+ب^۲}$

یعنی جیسا کہ $۱ + \frac{۲ ا لا}{لا^۲+ا^۲}$ > یا < $۱ + \frac{۲ ب لا}{لا^۲ + ب^۲}$ یعنی جیسا کہ $ا(لا^۲+ب^۲)$ > یا < $ب(لا^۲+ا^۲)$

یعنی جیسا کہ $(ا-ب) لا^۲$ > یا < $اب(ا-ب)$

(۱۶) یہہ دریافت ہوگا کہ $ا^۲ب + ب^۲ح + ح^۲ا - (ا^۲ح + ب^۲ا + ح^۲ب) = (ب-ا)(ح-ب)(ا-ح)$

اب اگر ا و ب و ح میں ترتیب تنازلی ہے تو ب - ا منفی ہو ح - ب منفی ہے ا - ح مثبت ہے

تو حاصل ضرب مثبت ہوا اسی طرح دوسری صورت بھی بیان ہوسکتی ہے

(۱۷) سب کو آپس میں ضرب دو اور سب رقموں کو داہنی طرف لے آؤ

$ط^۲ ب^۲ + ص^۲ ا^۲ - ۲ ط ا ص ب + ط^۲ ح^۲ + س^۲ ا^۲ - ۲ ط ح س ا + ...$ یعنی

$(ط ب - ص ا)^۲ + (ط ح - س ا)^۲ + ...$ حاصل ہوگا اسواسطے یہہ جملہ مثبت ہے

(۱۸) $۲(ا^۳ + ب^۳ + ح^۳) > اب(ا+ب) + ب ح(ب+ح) + ا ح(ح+ا)$ بموجب مثال پنجم

اور $\frac{ا^۳+ب^۳+ح^۳}{۳} > (ا^۳ ب^۳ ح^۳)^{\frac{1}{3}}$ بموجب دفعہ ۴۸۱ پس $ا^۳ + ب^۳ + ح^۳ > ۳ اب ح$

جمع کرو تو نتیجہ مطلوب حاصل ہوگا

(۱۹) $۶ اب ح > اب(ا+ب) + ب ح(ب+ح) + ح ا(ح+ا)$ بموجب مثال پنجم

اور جو اوپر حل لکھا ہے اوسکے مطابق $۳ اب ح > ا^۳ + ب^۳ + ح^۳$ جمع کرو

(۲۰) ۲ میں ضرب دیکر سب رقموں کو داہنی طرف لے آؤ تو اوس میں ایک صنف مجذوروں کی

$(\sqrt{ا_۱} - \sqrt{ا_۲})^۲ + (\sqrt{ا_۱} - \sqrt{ا_۳})^۲ + ... + (\sqrt{ا_۲} - \sqrt{ا_۳})^۲ + ...$

ہر زوج مقادیر کے لیے ایک مربع حاصل ہوگا اسواسطے یہہ جملہ مثبت ہے

(۲۱) فرض کرو کہ ا اور ب دو اعداد ہوں اور ا بڑا ہو تو ہم کو یہہ ثابت کرنا ہے کہ $\frac{ا+ب}{۲} - \sqrt{اب}$ چھوٹا بہ نسبت $\frac{(ا-ب)^{2}}{۸ب}$ اور بڑا بہ نسبت $\frac{(ا-ب)^{2}}{۸ا}$ کے ہے

اب $\frac{ا+ب}{۲} - \sqrt{اب}$ یعنے < $\frac{(ا-ب)^{2}}{۸ب}$ اگر $۴ب(\sqrt{ا} - \sqrt{ب})^{2}$ < $(ا-ب)^{2}$

یعنے اگر ۴ب < $(\sqrt{ا} + \sqrt{ب})^{2}$ یعنی اگر $۲\sqrt{ب}$ < $\sqrt{ا} + \sqrt{ب}$ اور یہہ صورت ظاہر ہے

اسی طرح مثال کا دوسرا حصہ بیان ہو سکتا ہے

(۲۲) ن مقادیر ۱ و ۲ و ۳ ۰۰۰ ن فرض کرو اونکا مجموعہ $\frac{ن(ن+۱)}{۲}$ ہے پس اونکا اوسط حسابیہ $\frac{ن+۱}{۲}$ ہے اسواسطے $\left(\frac{ن+۱}{۲}\right)^{ن}$ > [ن بموجب دفعہ ۴۸۱

(۲۳) ن مقادیر ۱ و ۳ و ۵ ۰۰۰ ۲ن−۱ مقرر کرو اونکا مجموعہ $ن^{2}$ ہے اور اونکا اوسط حسابیہ ن ہے پس اب دفعہ ۴۸۱ کا استعمال کرو

(۲۵) بموجب مثال ۲۳ کے ہم کو یہہ حاصل ہے کہ [۲ن > $(۲ن)^{ن}$ یعنے

(۲ن−۱) (۲ن−۳) ۰۰۰ ۳×۱×$۲^{ن}$ [ن > $(۲ن)^{ن}$

طرفین کو $۲^{ن}$ [ن $ن^{ن}$ پر تقسیم کرو تو ہم کو نتیجہ مطلوبہ حاصل ہوگا

(۲۶) $ا^{2}(ب^{2} + ح^{2})$ > $۲ا^{2}ب ح$ اور $ب^{2}(ح^{2} + ا^{2})$ > $۲ب^{2}ح ا$ اور $ح^{2}(ا^{2} + ب^{2})$ > $۲ح^{2}اب$

اسواسطے $ا^{2}ب^{2} + ب^{2}ح^{2} + ح^{2}ا^{2}$ > اب ح (ا+ب+ح) اب مثل مثال سوم یہہ بھی ہم کو حاصل ہے کہ

$ا^{4} + ب^{4} + ح^{4}$ > $ا^{2}ب^{2} + ب^{2}ح^{2} + ح^{2}ا^{2}$

(۲۷) $۴(ا^{3} + ب^{3} + ح^{3})$ > ۳[اب (ا+ب) + ب ح (ب+ح) + ح ا (ح+ا)] بموجب مثال نہم

$۲(ا^{3} + ب^{3} + ح^{3})$ > ۶ ا ب ح مثال ۱۸ جمع کرو

(۲۸) ضرب دیکر غیر مساوات کے یہہ صورت بناو

$۲(ا^{3} + ب^{3} + ح^{3})$ > اب (ا+ب) + ب ح (ب+ح) + ح ا (ح+ا) یہہ مثال نہم

(۲۹) پچیسویں باب کی تیسری مثال دیکھو یا اسطرح عمل کرو کہ

$(ا+ب+ح)^3 > 27$ ا ب ح یہہ ایک صورت دفعہ ۱۹۸ کی ہے اور

$(ا+ب+ح)^3 = ا^3 + ب^3 + ح^3 + (ا+ب)(ب+ح)(ح+ا)$ اور یہہ

$> 9(ا^3+ب^3+ح^3)$ بموجب مثال ۲۷

$$(30)\ \frac{\text{لوک}_1(1-ع)}{\text{لوک}_1(1-ق)} = \frac{\text{لوک}_ى(1-ع)}{\text{لوک}_ى(1-ق)} = \frac{ع + \frac{ع^2}{2} + \frac{ع^3}{3} + \cdots}{ق + \frac{ق^2}{2} + \frac{ق^3}{3} + \cdots}$$

یہہ $< \frac{ع+ع^2+ع^3+\cdots}{ق}$ اور $> \frac{ع}{ق+ق^2+ق^3+\cdots}$ اور

یہہ $< \frac{ع}{ق(1-ع)}$ اور $> \frac{ع}{ق \times \frac{1}{1-ق}}$

(۳۱) ضرب دی لو تو حاصل ایک صورت دفعہ ۱۹۸ کی ہوگی اور ان مقادیر ہونگیں جنمیں اول مقدار

ا، ا س ا م ... ا ن ہوگی اور مقادیر بہی اسے کے مثل ہونگیں

(۳۲) یہہ الجرا امین خود حل ہے -- اور ہم اسطرح یہی عمل کرکے ثابت کر سکتے ہیں کہ

ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی کہ ا + ا لا > لا + $ا^{لا}$ اسمیں لا کے جگہہ $\frac{ع}{ق}$ رکہو جسمیں ع اور ق

صحیح اعداد ہوں پس ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی کہ $\frac{ق-ع+ع ا}{ق} > ا^{\frac{ع}{ق}}$ اب یہہ ظاہر ہے جب

دفعہ ۱۸۱ کے ہی کیونکہ دائیں طرف اوسط حسابیہ ق مقادیر میں جنمیں سے

ع مقادیر برابر ہیں ا کے اور باقی برابر ا کے اور بائیں طرف اوسط ہندسیہ

ق مقادیر کے ہیں

باونواں باب

(۱) ع - ق = ع + ق - ۲ق یہہ فرق دو جفت عددوں کا ہی اسلئے وہ بہی جفت ہے

(۲) ۳۲۳۴ کو متباین اجزا ضربی میں تحلیل کیا تو ۳۲۳۴ = ۲ × ۳ × ۷^2 × ۱۱

پس مجذور کامل کے حاصل کرنے کے واسطے ۲ × ۳ × ۱۱ میں ضرب دینا چاہیے

(۳) ۱۸۴۵ کو متباین اجزا ضربی میں تحلیل کیا تو ۱۸۴۵ = ۳ × ۵ × ۴۱ پس مکعب کامل حاصل کرنیکو

واسطے ۳ × ۵^{۲} × ۱۴^{۲} مین ضرب دینا چاہیے

(۴) ۶۴۸۰ = ۲^{۴} × ۳^{۴} × ۵ پس ۲^{۲} × ۳^{۲} × ۵^{۱} مین ضرب دینا چاہیے

(۵) ۱۳۱۶۸ = ۲^{۴} × ۳ × ۸۲۳ اور ۸۲۳ ایک عدد اولی ہے اسکو ۲ × (۸۲۳)^{۲} مین ضرب دو

(۶) طاق مجذور کسی طاق عدد کا مثلاً ۲ن + ۱ کا مجذور ہوگا اور جفت مجذور کسی جفت عدد مثلاً ۲م کا مجذور ہوگا پس (۲ن + ۱)^{۲} + ۴م^{۲} ایک مجذور ہے اور وہ مجذور کسی طاق عدد کا ہونا چاہیے مثلاً وہ (۲ع + ۱)^{۲} ہو اس سے معلوم ہوا کہ ن(ن + ۱) + م^{۲} = ع(ع + ۱) لیکن ن(ن + ۱) ایک جفت عدد ہے تو ع(ع + ۱) بھی جفت عدد ہوگا اس سے معلوم ہوا کہ م^{۲} بھی جفت عدد ہے اسواسطے م بھی جفت ہے اسکو = ۲ق فرض کرو

اسواسطے (۲م)^{۲} = (۴ق)^{۲} = ۱۶ق^{۲}

(۷) بموجب مسئلہ فرمیٹ کے ع^{۴} − ۱ اضعاف ۵ کے ہین اگر ع اضعاف ۵ کا نہ ہو پس ع^{۲} − ۱ یا ع^{۲} + ۱ اضعاف ۵ کا ہے اگر ۵ کا اضعاف ع نہ ہو یعنی اگر ع اضعاف ۵ کا نہ ہو تو ع^{۲} = ۵ن ± ۱

(۸) فرمیٹ کے مسئلہ کے موافق ع^{۶} − ۱ اضعاف ۷ کا ہے اگر ن اضعاف ۷ کا نہ ہو پس ہر ایک ع^{۳} − ۱ اور ع^{۳} + ۱ مین سے اضعاف ۷ کا ہے اگر ع اضعاف ۷ کا نہ ہو پس اگر ع اضعاف ۷ کا نہ ہو تو ع^{۳} = ۷ن ± ۱

(۹) اگر ایک عدد مجذور اور مکعب دونو ہون تو اوسکی قوت کا نزول پورا نکلے گا اور موجب مسئلہ فرمیٹ کے ع^{۶} − ۱ اضعاف ۷ کے ہین اگر ع اضعاف ۷ کا نہ ہو

(۱۰) اگر ایک عدد ۳ پر پورا تقسیم ہوتا ہے اور اس سبب سے اوسکا مجذور بھی تقسیم ہوتا ہے اور اسیواسطے اوسکی صورت ۳ن − ۱ نہوگی - اگر ایک عدد ۳ پر تقسیم ہوتا ہو تو اوسکی صورت ۳م ± ۱ کی سی ہوگی اور اوسکا مجذور ۹م^{۲} ± ۶م + ۱ ہے اور اوسکی صورت ۳ن + ۱ کے

(۱۱) فرض کرو $\frac{ع(ع+۱)}{۲}$ مثلثی عدد ہے اب اگر م اور م + ۱ مین سے کوئی ۳ پر تقسیم

اوسکو ۲م + ۱ سے تعبیر کرو تو اب ہم کو اسکا مربع کرنا چاہئی (۲م+۱)۲ = ۴م (م+۱) + ۱
اور اسکے ۸ن + ۱ کی صورت ہے اسلئے کہ م (م + ۱) جفت عدد ہے

(۱۸) ۷ع = (۸ - ۱)ع = ۸ع - ع ۸ع-۱ + ۰۰۰ + (-۱)ع اسمین سی ہر رقم ۸ پر پوری تقسیم ہوتی ہے مگر اخر رقم اگر ع طاق ہی تو اخر رقم -۱ ہوگی پس اگر ع طاق ہی تو اوسکی صورت ۸ن - ۱ کی سی ہوگی

(۲۱) ا لا - ۲ لا۲ = ا۲/۸ - ۲ (لا - ا/۴)۲ پس بڑی سی بڑی قیمت جب حاصل ہوگی کہ (لا - ا/۴)۲ چھوٹے سے چھوٹا بنایا جاے اگر ا = ۴م تو لا = م ہوسکتا ہے اور ما حصل ا۲/۸ ہوگا
اور اگر ا = ۴م + ۱ تو لا = م ہوسکتا ہی اور ما حصل ا۲/۸ - ۱/۸ ہوسکتا ہے
اور اگر ا = ۴م + ۲ تو لا = م کے ہوسکتا ہے اور ما حصل ا۲/۸ - ۱/۲ ہوگا اگر ا = ۴م + ۳
تو لا = م + ۱ ہوسکتا ہے اور ما حصل ا۲/۸ - ۱/۸ ہوسکتا ہے

(۲۲) ن (ن + ۱) (۲ن + ۱) = (ن - ۱) (ن + ۱) + ن (ن + ۱) (ن + ۲) اب دفعہ ۱۷ کام مین لاو

(۲۳) تین متصل کے اعداد ن - ۱ اور ن اور ن + ۱ مین سے ضروری کہ ایک ۳ پر تقسیم ہو اور چونکہ (ن - ۱) اور ن + ۱ دونو جفت ہین تو ایک ۲ پر اور دوسرا ۴ پر پورا تقسیم ہوگا پس (ن - ۱) ن (ن + ۱) پورا ۲۴ پر تقسیم ہوگا

(۲۴) چونکہ ن پورا ۳ پر تقسیم ہوتا تو ۳م ± ۱ مین سی کسی ایک صورت کا ہوگا اور م جفت ہے کیونکہ ن طاق ہی تو ن۲ + ۵ = ۹م۲ ± ۶م + ۶ اور یہہ ۶ پر تقسیم ہوتا ہے

(۲۵) ن۵ - ن پورا بموجب مسئلہ فرمیٹ کے ۵ پر تقسیم ہوتا ہے اور نیز
ن۴ - ۱ = (ن - ۱) (ن + ۱) (ن۲ + ۱) اب (ن - ۱) (ن + ۱) پورا ۸ پر تقسیم ہوتا ہے اور ن۲ + ۱ پورا ۲ پر تقسیم ہوتا ہی اور (ن - ۱) (ن + ۱) پورا ۳ پر تقسیم ہوتا ہے کیونکہ (ن - ۱) ن (ن + ۱) پورا ۳ پر تقسیم ہوتا ہے اور ن ایک عدد اولی ہی جو ۳ کی برابر نہین ہے
پس ن۴ - ۱ پورا تقسیم ۵ × ۸ × ۲ × ۳ پر ہوتا ہے

(۲۶) (م۵ - ۵م۳ + ۴م)/۱۲۰ = ((م - ۲) (م - ۱) م (م + ۱) (م + ۲))/۱۲۰ اب دفعہ ۱۰ کو کام مین لاو

(۲۷) فرمیٹ کے مسئلہ کے اثبات مین جو کچھ لکھا ہی اوس سے معلوم ہوتا ہی کہ ن (ن^{۶} - ۱) پورا ۷ پر تقسیم ہوتا ہے
اور ن^{۶} - ۱ پورا ن^{۲} - ۱ پر بھی تقسیم ہوتا ہی پس ن (ن^{۶} - ۱) پورا (ن - ۱) ن (ن + ۱) پر تقسیم ہوتا ہے
اور اسی واسطے ۶ پر (دفعہ ۱۰۷ دیکھو) پس اسی ثابت ہوا کہ ن (ن^{۶} - ۱) پورا تقسیم ۶×۷ یعنی ۴۲ پر ہوتا ہے

(۲۸) لا^{ن} - لا = لا (لا$^{ن-۱}$ - ۱) فرمیٹ کے مسئلہ کا جو اثبات لکھا ہی اوس سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ اضعاف ن کا ہی
اسے معلوم ہوا کہ لا^{ن} اور لا جب ن پر تقسیم ہون تو ایک ہی باقی رہی

(۲۹) بموجب مسئلہ فرمیٹ ع$^{ن-۱}$ = ۱ + ع ن طرفین مساوات کا صعود ن قوت کا لو تو
ع^{م} = (۱ + ع ن)^{ن} اسی واسطے ع^{م} - ۱ = ن (ع ن) + $\frac{ن (ن - ۱)}{۲}$ (ع ن)^{۲} + ...
اب ہر رقم بائین طرف ن^{۲} پر پوری تقسیم ہوتی ہے

(۳۰) بموجب مسئلہ فرمیٹ کے ن^{۶} - ۱ کو ۷ پورا تقسیم کرتا ہی اور نیز ن^{۶} - ۱ = (ن^{۳} + ۱) (ن^{۳} - ۱)
یہ دو نو جز ضربی جفت ہین اسلئے ایک انمین سے ۲ اور دوسرا ۱۴ پر تقسیم ہوتا ہے

(۳۱) بموجب مسئلہ فرمیٹ کے ع$^{ن-۱}$ - ۱ پورا ن پر تقسیم ہوتا ہی اور چونکہ ن ایک عدد اولی ہی ۲ سے
بڑا ہی تو وہ طاق عدد ہی فرض کرو کہ ن = ۲م + ۱ تو ع$^{ن-۱}$ - ۱ = (ع^{م} + ۱) (ع^{م} - ۱)
یہ دو نو جز ضربی جفت ہین اسلئے ایک اونمین سے ۲ پر اور دوسرا ۲ن پر تقسیم ہوتا ہے

(۳۲) ع^{ن} - ع = ع (ع$^{ن-۱}$ - ۱) بموجب مسئلہ فرمیٹ کے دوسرا جز ضربی ن پر پورا تقسیم ہوتا ہے
اگر ع جفت ہی تو اول جز ضربی اور اگر طاق ہے تو دوسرا جز ضربی پورا ۲ پر تقسیم ہوتا ہے
اگر ع اضعاف ۳ کا ہے تو اول جز ضربی ۳ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے
اگر ع اضعاف ۳ کا نہے تو اوسکی صورت ۳م ± ۱ مین سی کوئی نہ کوئی ہوگی اور
دو نو صورتون مین ع$^{ن-۱}$ - ۱ پورا ۳ پر تقسیم ہوتا ہے اسے معلوم ہوا کہ حاصل ضرب
۶ ن پر تقسیم ہوتا ہے ن جو ایک جز ضربی ع$^{ن-۱}$ - ۱ کا ہوتا ہی وہ ۲ یا ۳ کے ساتھ
تطبیق نہین پاتا کیونکہ ن بڑا ۳ سے ہے

(۳۳) بموجب مسئلہ فرمیٹ کے ع$^{ن-۱}$ - ۱ پورا تقسیم ن پر ہوتا ہی اور چونکہ ن - ۱ جفت عدد ہی اسلئے

$ع^{ن-۱}$ - ۱ پورا ۸ پر تقسیم ہوتا ہے ۳ مثال دیکھو اور چونکہ ع ایک عدد اولی بڑا ۳ سے ہے تو اوسکی صورت ۳م ± ۱ میں سے کوئی ہوگی اور $ع^{ن-۱}$ - ۱ پورا ۳ پر تقسیم ہوتا ہے

(۳۴) فرضکرو کہ سلسلہ کے کسی رقم کو $لا$ تعبیر کرتی ہے تو بموجب مسئلہ فرمیٹ کے $لا^{ن}$ = لا + ایک اضعاف ن جمع کرنے سے یہہ معلوم ہوگا کہ سلسلہ معلوم برابر $\frac{ن^{ن}(ن+۱)}{۲}$ جسمیں بعض اضعاف ن اور مربعین اور $\frac{ن(ن+۱)}{۲}$ بھی ن کا اضعاف ہے اگر ن بڑا ۲ سے ہو

(۳۵) فرضکرو کہ کسی عدد کو ع تعبیر کرتا ہے اگر ۱۱ کا اضعاف ع ہے تو $ع^{۱۰}$ بھی اوسکا اضعاف ہے اگر ۱۱ کا اضعاف ع نہیں ہے تو بحکم مسئلہ فرمیٹ کے $ع^{۱۰}$ - ۱ اضعاف ۱۱ کا ہے

(۳۶) فرض کرو کہ کسی عدد کو ع تعبیر کرتا ہے اگر ۱۳ کا اضعاف ع ہے تو $ع^{۱۲}$ بھی اوسکا اضعاف ہے اور اگر ۱۳ کا اضعاف ع نہیں ہے تو بموجب مسئلہ فرمیٹ کے $ع^{۱۲}$ - ۱ اضعاف ۱۳ کا ہے

(۳۷) فرضکرو کہ کسی عدد کو ع تعبیر کرتا ہے پس اگر ۱۹ کا اضعاف ع ہے تو $ع^{۱۸}$ بھی اوسکا اضعاف ہے اور اگر ۱۹ کا اضعاف ع نہیں ہے تو بموجب مسئلہ فرمیٹ کے $ع^{۱۸}$ - ۱ اضعاف ۱۹ کا ہے اسیواسطے $ع^{۹}$ + ۱ اور $ع^{۹}$ - ۱ مین کوئی نہ کوئی اضعاف ۱۹ کا ہے

(۳۸) فرض کرو کہ کسی عدد کو ع تعبیر کرتا ہے پس اگر ۲۳ کا اضعاف ع ہے تو $ع^{۱۱}$ اوسکا اضعاف ہے اور اگر ۲۳ کا اضعاف ع نہیں ہے تو بموجب مسئلہ فرمیٹ کے $ع^{۲۲}$ - ۱ اضعاف ۲۳ کا ہے اسواسطے $ع^{۱۱}$ + ۱ یا $ع^{۱۱}$ - ۱ مین سے کوئی اضعاف ۲۳ کا ہے

(۳۹) فرضکرو کہ ع کسی عدد کو تعبیر کرتا ہے اگر ۵ کا اضعاف ع ہے تو ع کا مجذور یا کوئی اوسکے بڑی قوت ۲۵ کا اضعاف ہوگا اور اگر ۵ کا اضعاف ع ہو تو بموجب مسئلہ فرمیٹ کے $ع^{۴}$ = ۱ + ۵ف اسیواسطے $ع^{۲۰}$ = $(۱ + ۵ف)^{۵}$ = ۱ + ۵ (۵ف) + ...
اور اسکی صورت ۱ + ۲۵ن کی ہے

(۴۰) ۱۴۰ = $۲^{۲}$ × ۵ × ۷ اور $۲^{۲}$ × ۵ × ۷ $(۱ - \frac{۱}{۲})(۱ - \frac{۱}{۵})(۱ - \frac{۱}{۷})$ = ۴۸

(۴۱) ۳۶۰ = $۲^{۳}$ × $۳^{۲}$ × ۵ اور $۲^{۳}$ × $۳^{۲}$ × ۵ $(۱ - \frac{۱}{۲})(۱ - \frac{۱}{۳})(۱ - \frac{۱}{۵})$ = ۹۶

(۴۲) ۱۰۰۰ = ۲^۳ × ۵^۳ اور ۲^۳ ۵^۳ (۱ − ۱/۲) (۱ − ۱/۵) = ۴۰۰

(۴۳) ۳^۴ × ۷^۲ × ۱۱ (۱ − ۱/۳) (۱ − ۱/۷) (۱ − ۱/۱۱) = ۲۲۶۸۰

(۴۴) ۲^ن × ۵^ن (۱ − ۱/۲) (۱ − ۱/۵) = ۲^(ن−۱) ۵^(ن+۱) −

(۴۵) ۱۴۰ = ۲^۲ × ۵ × ۷ اور (۱ + ۲) (۱ + ۱) (۱ + ۱) = ۱۲

(۴۶) ۱۸۴۵ = ۳^۲ × ۵ × ۴۱ اور (۱ + ۲) (۱ + ۱) (۱ + ۱) = ۱۲

(۴۷) ۹۱ = ۲^۷ × ۳^۴ × ۵ × ۷ اور (۱ + ۷) (۱ + ۴) (۱ + ۱) (۱ + ۱) = ۱۶۰

(۲^۸ − ۱) (۳^۵ − ۱) (۵^۲ − ۱) (۷^۲ − ۱) / (۲ − ۱) (۳ − ۱) (۵ − ۱) (۷ − ۱) = ۱۴۸۱۰۴۰

(۴۸) بموجب دفعہ ۲۳۷ اور مثال ۴۷ کے عدد = ۱۲/۲ = ۶

(۴۹) ۱۰۰۸۰۰ = ۲^۴ × ۳^۲ × ۵^۲ × ۷ اس عدد کے مقسوم علیہ
= (۱ + ۴) (۱ + ۲) (۱ + ۲) (۱ + ۱) = ۱۲۶

(۵۰) چار ربع قاموں میں ۳۶۰ درجے ہوتے ہیں اور ۳۶۰ = ۲^۳ × ۳^۲ × ۵ اور
مقسوم علیہوں کی تعداد = (۳ + ۱) (۲ + ۱) (۱ + ۱) = ۲۴
اور چار ربع قاموں میں فرانسیسی درجے ۴۰۰ ہوتے ہیں اور ۴۰۰ = ۲^۴ × ۵^۲
مقسوم علیہوں کی تعداد = (۴ + ۱) (۲ + ۱) = ۱۵

(۵۱) ۱۰^ن = ۲^ن × ۵^ن اور مساوات لا ر = ۱۰^ن اب لا کی قیمت ۱۰^ن کے کسی مقسوم علیہ کی برابر رکھہ سکتے ہیں اور اوسی ر کی قیمت نکال سکتے ہیں اسلئے بموجب دفعہ ۲۲۷ کے حلوں کی تعداد =
(ن + ۱) (ن + ۱)

(۵۲) فرض کرو کہ ع = ا^م ب^ن ج^ل ... جسمیں ا و ب و ج اعداد اولے ہیں اب ہم یہہ دریافت کرینگے کہ ف میں اسکے کونسے قوت واقع ہوگی فرض کرو کہ ب^ن ج^ل ... کی مقسوم علیہوں کی تعداد کو ص تعبیر کرتا ہے تو ظاہر ہے کہ ع کے ص مقسوم علیہ ایسے ہیں جنمیں ا نہیں اور ص مقسوم علیہ ایسے ہیں جنمیں ا واقع ہوتا ہے اور ص مقسوم علیہ ایسے ہیں جنمیں ا^۲ واقع ہوتا ہے

اور علے ہذا القیاس حصہ مقسوم علیہ وہ ہونگے جنمین ا^م واقع ہوتا ہے اسسے ثابت ہوا کہ ا کا قوت نمائے مین حصہ (۱+۲+۳+ ۰۰۰ + م) یعنی حصہ م(م+۱)/۲ یعنی ن م/۲ ہے اور اسی طرح سے ب کا قوت نمائے ن س/۲ ہے اور علی ہذا القیاس پس ف = ع^{ن/۲} اور ن جفت ہو الا اوس صورت مین جسمین م و ق ور ۔ سب جفت ہین پس ع^ن ہمیشہ منطق ہو اسلیے ع^ن ایک مجذور کامل ہے

(۵۳) فرض کرو کہ ا^ع ب^ق ج^ر ۔۔۔ وہ عدد ہو جسکی ۳۰ مقسوم علیہ ہین اور ا ب ج ۔۔۔ اعداد اولی ہین تو (ع+۱) (ق+۱) (ر+۱) = ۳۰ اب اس مساوات کے حل مختلف ہو سکتے ہین ع = ۴ اور ق = ۲ اور ع = ۵ اور ق = ۴ اور ر = ۰ پس تین سے زیادہ اجزا ضربی متباین نہین ہو سکتی گو اوسی کم ہو سکتی ہین اب ا = ۲ اور ب = ۳ اور ج = ۵ لیتی ہین کیونکہ یہی سب سے ادنے درجہ کے اعداد اولے ہین تو امتحان کرنے سے یہہ معلوم ہوگا کہ ۲^۴ × ۳^۲ × ۵ چھوٹے سے چھوٹا عدد ہے جسکے ۳۰ مقسوم علیہ ہین

(۵۴) یہہ بھی ۵۳ مثال کی طرح اوسکل سے حل ہوتی ہے ۴۲ = ۲ × ۳ × ۷ اسسے ہم کو معلوم ہوتا ہے کہ وہ عدد جو ۴۲ مقسوم علیہ رکھتا ہے ۳ سے زیادہ اجزا ضربی متباین نہین رکھہ سکتا گو اوس کم رکھتا ہو وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد جو چھہ جز ضربی متباین اور ۴۲ مقسوم علیہ رکھتا ہے ۲ × ۳ × ۵ × ۷ × ۱۱ × ۱۳ ہے اور وہ سب سے چھوٹا عدد جو ۵ جز ضربی متباین اور ۴۲ مقسوم علیہ رکھتا ہے ۲^۲ × ۳ × ۵ × ۷ × ۱۱ ہے اور یہہ پہلے عدد سے چھوٹا ہے اب چار متباین اجزا ضربی تو ۲^۲ × ۳ × ۵ × ۷ اور ۲^۲ × ۳^۲ × ۵ × ۷ مین سے کوئی منتخب کرنا چاہیے اور اگر ہم تین متباین اجزا ضربی لین تو ۲^۶ × ۳^۲ × ۵ اور ۲^۶ × ۳ × ۵^۲ ان چار عددون مین سب سے چھوٹا ۲^۲ × ۳^۲ × ۵ × ۷ ہے اور یہہ چھوٹا ۲^۲ × ۳ × ۵ × ۷ × ۱۱ سے ہے اب ہم یہہ ثابت کر سکتے ہین کہ ۲^۲ × ۳^۲ × ۵ × ۷ چھوٹا اوس عدد سے ہے جو ۴۲ مقسوم علیہ اور دو مختلف متباین جز ضربی یا صرف ایک جز ضربی اولے رکھتا ہے

(۵۵) فرض کرو کہ جب ع ا کو ب پر تقسیم کریں تو خارج قسمت ن نکلے
اور باقی رہے پس ع ا/ب = ن + ر/ب اور جب (ب − ع) ا تقسیم ب پر کیا جاوے تو
خارج قسمت نَ نکلے اور باقی رَ رہے پس (ب − ع) ا/ب = نَ + رَ/ب اسی معلوم ہوا کہ
جمع کرنے سے ا = ن + نَ + (ر + رَ)/ب اب نہ ر اور نہ رَ صفر ہو سکتی ہیں کیا اسواسطے
ا اور ب متبائن ہیں اسواسطے ر + رَ برابر ب کے ہو اور ن + نَ برابر ا − ۱ کے

(۵۶) ہر یک عدد ان صورتوں میں سے ایک نہ ایک ہوگا

ع ن د ع ن + ۱ د ع ن + ۲ . . . ع ن + (ن − ۱)

(ع ن + ۱)^۲ اور [ع ن + (ن − ۱)]^۲ کو جب ن پر تقسیم کرینگے تو ایک ہی باقی رہیگی
اسواسطے (ع ن + ۱)^۲ = ن (ع^۲ ن + ۲ ع) + ۱ اور [ع ن + (ن − ۱)]^۲ = ن [(ع + ۱)^۲ ن − ۲ (ع + ۱) ۲] + ۱
اور ایسی ہی (ع ن + ۲)^۲ اور [ع ن + (ن − ۲)] کو جب ن پر تقسیم کرینگے تو ایک ہی
باقی رہیگی اور علے ہذا القیاس پس ن/۲ سے زاید مختلف باقیات نہیں رکھہ سکتی

(۵۷) ۲^۲ × ۵ × ۷ لا = ی^۳ پس تا کہ ی^۳ ایک مکعب کامل ہو تو لا کی یہہ صورت ہونی چاہیے
۲ × ۵^۲ × ۷^۲ ط^۳ تو ی = ۲ × ۵ × ۷ × ط

(۵۸) ہر یک عدد ان صورتوں میں سے کوئی نہ کوئی ایک ہوگا
ن ر و ن ر + ۱ اور ن ر + ۲ . . ن ر + (ر − ۱)
تو (ن ر)^۲ کا ۰ پر ختم ہوگا اور (ن + ۱)^۲ اور (ن ر + ۲)^۲ و . . کا
خاتمہ ۱^۲ و ۲^۲ . . کے ہندسوں پر ہوگا پس موافق مثال ۵۶ کے یہاں
(ر − ۱)/۲ مختلف ہندسے بغیر صفر کے شمار کرنے کے ہونگے اور صفر کو بہی شمار کرلیں
تو (ر + ۱)/۲ ہندسے کل ہونگے

(۵۹) تمثیلاً فرض کرو کہ ع = ۴ اور ن = ا^۲ + ب^۲ + ج^۲ + د^۲ تو ہم کو یہہ ثابت کرنا ہے کہ
۴ ن کی تحلیل ۴ مجذوروں میں کریں اور درحقیقت یہہ امر ہم کو حاصل ہے کہ

۶ن = (ا + ب)^۲ + (ا − ب)^۲ + (ا + ح)^۲ + (ا − ح)^۲ + (ا + د)^۲ + (ا − د)^۲
+ (ب + ح)^۲ + (ب − ح)^۲ + (ب + د)^۲ + (ب − د)^۲ + (ح + د)^۲ + (ح − د)^۲

اور خواہ ع کی کچھہ ہی قیمت فرض کرین اس حاصل کو ثابت کر سکتی ہین

(۶۰) ۲^{۴ن} + ۱۵ن − ۱ = ۱۶^ن + ۱۵ن − ۱ = (۱ + ۳)^{۲ن} + ۱۵ن − ۱ = ۱ + ۲ن ۳ + ن(ن − ۱)/۲ ۳^۲ + ...
= ۱۸ن + ن(ن − ۱)/۲ ۳^۲ + ن(ن − ۱)(ن − ۲)/۳! ۳^۳ + ...

ہر ایک رقم ۹ پر پوری تقسیم ہوتی ہے

(۶۱) (لا + ۱) (لا + ۲) ... (لا + ن) کو ضرب باہم دو تو موجب دفعہ ۵۰ کے حاصل ضرب لا^ن + ع۱ لا^{ن−۱} + ع۲ لا^{ن−۲} + ... + عن ہوگا لا = ۱ کے رکھو تو جملہ کے یہہ صورت ہو جائینگے ن + ۱ یہہ ن پر تقسیم ہوتا ہے اور جب عن کو جو برابر ن کے ہے تفریق کرین تو باقی بہی ن پر پوری تقسیم ہوگی

(۶۲) فرض کرو کہ کسی عدد کو ع تعبیر کرتا ہے اگر ع اضعاف ۵ کا ہو تو ع کا مکعب اور کوئی ایسی بڑی قوت اضعاف ۱۲۵ کا ہوگا اور اگر ع اضعاف ۵ کا نہ ہو تو بموجب مسئلہ فرما کے ع^۴ = ۱ + ۵ف اسواسطے ع^{۱۰۰} = (۱ + ۵ف)^{۲۵} = ۱ + ۲۵ × ۵ف + ...

اور اسکی صورت ۱ + ۱۲۵ن کی ہے

ترپیپن وان باب

(۱) اول واردات کا احتمال وقوع ۲/۵ ہے اور دوسرے واردات کا احتمال وقوع ۴/۷ ہے اسواسطے دونون کا احتمال وقوع ۸/۳۵ ہے اور عدم وقوع کے نسبت ۲۷ و ۸ کے نسبت ہے

(۲) دونو کے مرجانی کا احتمال ۸/۱۵ × ۲/۳ یعنی ۱۶/۴۵ ہے اسواسطے ایک کے زندہ رہنے کا احتمال ۲۹/۴۵ ہے

(۳) فرض کرو کہ یہہ خاص آدمی زید اور بکر ہین تو اس امر کا احتمال کہ بکر زید کی داہنی طرف بیٹھا ہو ۱/۲۲ ہے اور اس بات کا احتمال کہ بکر زید کی بائین طرف بیٹھا ہو ۱/۲۲ ہے اب احتمال اس امر کا کہ زید کی داہنی طرف یا بائین طرف بکر بیٹھا ہو ۱/۱۱ ہے پس زید و بکر کے پاس پاس بیٹھنی کی نسبت

مخالف ۱۰ اور ۱ کی نسبت ہوئی

(۴) اس امر کا اتفاق کہ دونو سوال کو حل نہ کر سکیں $\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}$ یعنی $\frac{5}{8}$ ہی اسلئے اس امر کا احتمال کہ دونو نہ حل کر سکیں $\frac{3}{8}$ ہے

(۵) دو سیاہ گولیاں $\frac{4\times5}{1\cdot2}$ طور سے نکل سکتی ہیں اور ایک سرخ گولی ۳ طور سے اسلئے ۳۰ صورتیں حسب منشا ہیں اور کل طور تین تین گولیوں کی نکلنی کی کل ۱۲ گولیوں میں سے $\frac{3\times4\times5}{1\cdot2\cdot3}$ $\frac{8\times9\times10}{1\cdot2\cdot3}$ ہیں

اب اول کو دوم پر تقسیم کرو تو $\frac{1}{4}$ حاصل ہوگا

(۶) اول ہاتھ میں پو کے آنے کا احتمال اور دوسرے ہاتھ میں پو کے نہ آنے کا احتمال $\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}$ یعنی $\frac{5}{36}$ ہی اور اول ہاتھ میں پو کے نہ آنے کا احتمال اور دوسرے ہاتھ میں پو کی آنی کا احتمال بھی $\frac{5}{36}$ ہی پس سارا احتمال $\frac{10}{36}$ ہی

(۷) دونو پانسوں میں پو کے نہ آنے کا احتمال $\frac{25}{36}$ ہی اسلئے نہ آنے کا احتمال $1-\frac{25}{36}$ یعنی $\frac{11}{36}$ ہی

(۸) چونکہ ۷ = ۶ + ۱ = ۵ + ۲ = ۴ + ۳ = ۳ + ۴ = ۲ + ۵ = ۱ + ۶ پس

۶ صورتیں ستے کی آنی کی ہیں اور گیارہ کے آنی کی صرف دو صورتیں ہیں کیونکہ ۱۱ = ۶ + ۵ = ۵ + ۶

پس کل صورتیں اونکی آنے کی ۸ ہیں اور کل صورتیں ۳۶ ہیں اسواسطے اونکی آنی کا احتمال $\frac{8}{36}$ یعنی $\frac{2}{9}$ ہی

اور نسبت مخالف ۷ اور ۲ کے نسبت ہے

(۹) فرض کرو کہ تھیلی میں ا اشرفیاں تھیں اور اول تھیلی میں ب روپیہ اور دوسرے تھیلی میں ج روپیے تھے

اب کسی ایک تھیلی کے اٹھا لینے کا احتمال $\frac{1}{2}$ ہے اور اشرفی نکلنی کا احتمال $\frac{1}{2}\left(\frac{\text{ا}}{\text{ا}+\text{ب}}+\frac{\text{ا}}{\text{ا}+\text{ج}}\right)$ ہی اور

اگر تمام روپیے اشرفیاں ایک ہی تھیلی میں ہوتے تو اشرفی نکلنی کا احتمال $\frac{2\text{ا}}{2\text{ا}+\text{ب}+\text{ج}}$ ہوتا

اب اگر اول جملہ میں سے دوسرے جملہ کو تفریق کریں اور حاصل کی تحویل کریں تو یہ حاصل ہوگا کہ

$\frac{\text{ا}(\text{ب}-\text{ج})^2}{2(\text{ا}+\text{ب})(\text{ا}+\text{ج})(2\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})}$ اسسے معلوم ہوا کہ پہلا جملہ بڑا ہے بنسبت دوسرے جملہ کے ہے

(۱۰) اب اسکا احتمال کہ موہن کے ساتھ سوہن یا رادھا یا کرشن ایک کشتی میں ہو برابر ہی اب اگر موہن سوہن کے ساتھ یا رادھا کی ساتھ ہی تو ہاری کا اور اگر کرشن کے ساتھ ہی تو ہارنی جیتنی کا احتمال برابر ہے اور اسیطرح سوہن اور رادھا اور کرشن کے حالتوں کا امتحان کر سکتے ہیں

(۱۱) دو بانسوں سے چھتیس ۳۶ طرح کے بانسی اٹھ سکتی ہیں — اب چھ صورتیں تو ایسی ہیں کہ ان میں دونوں بانسوں کے خال ایک سے اوپر آئینگی اور دس صورتیں ایسی ہیں کہ ایک بانسی میں تو ۲ آئے اور دوسرے میں نہ آئے تو اس سے معلوم ہوا کہ ۱۶ صورتیں مخالف ہیں تو ۲۰ صورتیں موافق ہونگیں اس لیے احتمال $\frac{20}{36}$ ہے

(۱۲) اب کل صورتیں وہ اجتماع ہیں جو ۳۰ اشیا میں سے چار چار کا لیا جائے اور وہ $\frac{27\times28\times29\times30}{\lfloor 4}$ ہیں اور وہ صورتیں جنمیں مکعب اور ۲ کا باقی ۲۸ ٹکٹوں میں سے کسی زوج کے ساتھ نکل آئے $\frac{27\times28}{\lfloor 2}$ اب اس عدد کو پہلے عدد پر تقسیم کرو تو احتمالات $\frac{4\times3}{29\times30}$ نکلینگے

(۱۳) اول قمار خانہ میں ہم ۹ چٹھیاں خیال کر سکتے ہیں جنمیں ۶ خالی ہیں تو وہ صورتیں جنمیں تین چٹھیاں نکلیں $\frac{9\times8\times7}{\lfloor 3}$ یعنی ۸۴ ہیں اور وہ صورتیں جنمیں زید کی مال کی چٹھی نہ نکلیں وہ ہیں جو ۶ خالی چٹھیوں میں تین تین نکالی جائیں یعنی $\frac{4\times5\times6}{\lfloor 3}$ یعنی ۲۰
تو اس سے معلوم ہوا کہ ۶۴ صورتیں ایسے ہیں جنمیں زید کے ایک یا زیادہ مال کی چٹھیاں نکلینگے پس زید کے مال پانے کا احتمال $\frac{64}{84}$ یعنی $\frac{16}{21}$ ہے ہر یک چٹھی جدا جدا نکالی جاے تو ہم اسطرح عمل کریں کہ اول خالی چٹھی کے نکلنے کا احتمال $\frac{6}{9}$ ہے اب ۸ چٹھیاں باقی رہیں جنمیں سے ۵ خالی ہیں تو دوسرے دفعہ خالی چٹھی نکلنے کا احتمال $\frac{5}{8}$ ہے اور علیٰ ہذا القیاس تیسرے دفعہ خالی چٹھی نکلنے کا احتمال $\frac{4}{7}$ ہے پس سارا احتمال ناکامیابی کے $\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}$
یعنی $\frac{5}{21}$ ہے پس زید کے نام ایک یا زیادہ مال کی چٹھی نکلنے کا احتمال $1-\frac{5}{21}$ پس $\frac{16}{21}$ ہے اور بکر کا احتمال $=\frac{1}{3}=\frac{7}{21}$

(۱۴) اول تھیلی میں سے سفید گولی نکلنے کا احتمال $\frac{3}{7}$ ہے اگر ایک سفید گولی نکل ائی اور وہ دوسرے تھیلی میں ڈالی جائے تو اوسمیں ۴ سفید گولیاں اور ۴ سیاہ گولیاں ہونگیں اور ایک سفید گولی نکلنے کا احتمال $\frac{4}{8}$ ہے اسواسطے دونو دفعہ سفید گولی کے نکلنے کا احتمال $=\frac{3}{7}\times\frac{4}{8}=\frac{3}{14}$

(۱۵) ہم یہہ چاہتے ہیں چہرہ اوپر ایک دفعہ یا تین دفعہ یا پانچ دفعہ آئے اور یہہ احتمال ان ہے صورت مفصلہ $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^{5}$ کے ارقام دوم و چہارم وغیرہ کے مجموعہ کا

احتمال پھر اسیواسطے $\frac{۱}{۲^ن}\left[\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\right)^ن-\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\right)^ن\right]$ یعنے $\frac{۱}{۲}$ ہے

(۱۶) اب یہان صورتین $۲^ن$ ہین اور موافق صورتین ن ہین اسواسطے ن روپیون مین سے ہر ایک کا چہرہ اوپر آسکتا ہے پس احتمال $\frac{ن}{۲^ن}$ ہے

(۱۷) فرض کرو کہ م+ن اشیا مین سے ع+ق چیزون کا اجتماع ا ایک وقت مین ہے اور م اشیا مین سے ع اشیا کا اجتماع ب ایک وقت مین ہے اور ن اشیا مین سے ق اشیا کا اجتماع ح ایک وقت مین ہے پس کل صورتین تو ا ہین اور موافق صورتین ب ح ہین اسلئے احتمال $\frac{ب ح}{ا}$ ہے

(۱۸) دفعہ ۴۰۷ مین ع = $\frac{۱}{۳۶}$ اور ق = $\frac{۳۵}{۳۶}$ اور ن = ۶ اور ر = ۲
پس یہہ حاصل ہوگا کہ $\frac{۱}{(۳۶)^۶}\left[۱+۶\times۳۵+۱۵\times(۳۵)^۲\right]$ یعنی $\frac{۱۸۵۸۶}{(۳۶)^۶}$

(۱۹) دفعہ ۴۰۷ مین ع = $\frac{۱}{۶}$ اور ق = $\frac{۵}{۶}$ اور ن = ۶ اور ر = ۱
پس یہہ حاصل ہوگا کہ $\frac{۱}{(۶)^۶}\left[۱+۵\times۶+۵^۲\times۱۵+۵^۳\times۲۰+۵^۴\times۱۵+۵^۵\times۶\right]$ یعنی $\frac{۳۱۰۳۱}{۶^۶}$

(۲۰) دفعہ ۴۰۷ مین ع = $\frac{۹}{۱۰}$ اور ق = $\frac{۱}{۱۰}$ اور ن = ۵ اور ر = ۳
پس $\frac{۱}{۱۰^۵}\left[۹^۵+۹^۴\times۵+۹^۳\times۱۰\right]$ یعنی $\frac{۱۲۳۹۳}{۱۲۵۰۰}$ ہے

(۲۱) یکسان خال نہ آنے کا احتمال $\left(\frac{۵}{۶}\right)^۳$ ہے پس احتمال ایک دفعہ یا زیادہ دفعہ نکلنے کا $۱-\left(\frac{۵}{۶}\right)^۳$ ہے

(۲۲) احتمال دو چھکون کے نہ پھینکنے کا $\left(\frac{۳۵}{۳۶}\right)^۳$ ہے پس ایک دفعہ یا زیادہ دفعہ دو چھکون کے آنے کا احتمال $۱-\left(\frac{۳۵}{۳۶}\right)^۳$ ہے

(۲۳) دفعہ ۴۰۷ مین ع = $\frac{۱}{۶}$ اور ق = $\frac{۵}{۶}$ اور ن = ۵ اور ر = ۲ رکھو تو
یہہ حاصل ہوگا کہ $\frac{۱}{۶^۵}\left[۱+۶\times۵+۶^۲\times۱۰+۶^۳\times۱۰\right]$ یعنے $\frac{۲۵۵۱}{۶^۵}$ ہے
اس امر پر بھی خیال کرنا چاہیے کہ چٹھیون کی تعداد اسی بہت سی فرض کی گئی ہے کہ ع عملاً جب بھی رہتا ہے کہ ایک یا دو چٹھیان نکال لی جائین اس مثال کو مثال ۱۲ سے مقابلہ کرکے دیکھو جسمین دوسرے طریقے سے زید کے مال پانے کا احتمال نکالا گیا ہے

(۲۴) تاش کے باون ورق ہوتے ہین اونمین سے چار چار لئے جائین تو کل صورتین وہ اجتماع ہوگا جو ۵۲ اشیا مین سے چار چار چیزون کا لیا جاوے $\frac{۴۹\times۵۰\times۵۱\times۵۲}{\underline{|۴}}$ ہے ان مین سے $۱۳^۴$ صورتین موافق مدعا ہین پس

اسواسطے کہ ہر بازی سے ہر ایک پتا لیا جا سکتا ہے
پس دوسرے عدد کو پہلے عدد پر تقسیم کرکے احتمال نکالو

(۲۵) کل صورتیں $\frac{49\times50\times51\times52}{\lfloor 4}$ ہیں اور موافق صورتیں انمیں سے چار ہیں کیونکہ چار ہی بازیاں ہیں پس ۴ کو صورتوں کے کل تعداد پر تقسیم کرو تو احتمال مطلوب حاصل ہوگا

(۲۶) دفعہ ۱۴۷ میں ع = $\frac{2}{3}$ اور ق = $\frac{1}{3}$ اور م = ۴ اور ن = ۱ پس محسن کی چار بازیاں جیتنے کا احتمال پانچ میں سے $(\frac{2}{3})^4\left[1+4\times\frac{1}{3}\right]$ یعنی $\frac{112}{243}$ ہے پس بسبب مخالف ۱۳۱ و ۱۱۲ ہے

(۲۷) دفعہ ۱۴۷ میں ع = $\frac{2}{5}$ اور ق = $\frac{3}{5}$ اور ن = ۵ اور ر = ۲
پس ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ $\frac{1}{5^5}\left[2^5+3\times2^4\times5+3^2\times2^3\times10+3^3\times2^2\times10\right]$
یعنے $\frac{2072}{5^5}$ ہے

(۲۸) تین آدمیوں کے نام زید و بکر و عمر رکھو پس اس امر کا احتمال کہ زید سفید گولی نکالے $\frac{3}{8}$ ہے اور اوسکے نہ نکالنے کا احتمال $\frac{5}{8}$ ہے پس اب تین سفید گولیاں اور چار سیاہ گولیاں رہیں تو بکر کے سفید گولی نکالنے کا احتمال $\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}$ ہے اور زید اور بکر دونوں کے نہ کامیاب ہونے کا احتمال $\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}$ ہے اب ۳ سفید گولیاں اور ۳ کالی گولیاں ہیں تو عمر کے سفید گولی نکالنے کا احتمال $\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}$ ہے پس اگر زید بکر عمر تینوں ناکامیاب ہوں تو زید پہر گولی نکالیگا اور علے ہذا القیاس اور پس کل احتمال زید کے
$\frac{3}{8}+\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}$ یعنے $\frac{27}{56}$ ہے اور بکر کا احتمال
$\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}+\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$ یعنے $\frac{18}{56}$ ہے اور عمر کا احتمال
$\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}+\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{3}$ یعنے $\frac{11}{56}$ ہے

(۲۹) اب پچھلی چار بازیوں میں تین یا زیادہ بازیوں کے جیتنے میں کیا تو وہ چاروں بازیاں جیتیگا یا پہلے دوسرے تیسرے چوتھی ایک بازی ہاریگا پس ان پانچوں صورتوں میں یہہ احتمالات ہیں
$\frac{2\times2\times2\times2}{3^4}$ اور $\frac{2\times2\times1\times1}{3^4}$ اور $\frac{2\times1\times1\times2}{3^4}$ اور $\frac{1\times1\times2\times2}{3^4}$ و $\frac{1\times2\times2\times2}{3^4}$

اوران کسرون کا مجموعہ $\frac{۳۶}{۸۱}$ یعنے $\frac{۴}{۹}$ ہے

(۳۰) تاکہ روان ادمی پانسہ پہینکی ضرور ہی کہ ر-۱ آدمی سب ناکامیاب ہوتی ہون پس $(\frac{ن-۱}{ن})^{ر-۱}$ $\frac{۱}{ن}$ احتمال اسکا ہی کہ وہ پہلی دفعہ مین جیتے - اگر وہ ناکامیاب ہو تو اور ادمی بہی کامیاب ہونگے اور وہ دوسرے دفعہ پانسہ پہینکیگا تو اوسکے جیتنی کا احتمال دوسرے دفعہ $(\frac{ن-۱}{ن})^{ع+ر-۱}$ $\frac{۱}{ن}$ ہی اور علی ہذا القیاس پس اوسکا سارا احتمال ایک سلسلہ ہندسیہ غیر متناہی کی اول رقم $\frac{۱}{ن}(\frac{ن-۱}{ن})^{ر-۱}$ ہے اور نسبت مشترک $(\frac{ن-۱}{ن})^{ع}$ ہے

(۳۱) خاص پارسل لایا جاوی اوسکا احتمال $\frac{۲}{۳}$ ہی پس احتمال کہ کتاب مطلوب خاص پارسل سے نکلی $\frac{۲}{۳}$ × $\frac{۲}{۵}$ ہے یعنی $\frac{۴}{۱۵}$ ہے اب دو پارسل اور رہین پس اور چار پارسلون مین سے پارسل کے انے کا احتمال $\frac{۱}{۳}$ ہی اور یہہ احتمال کہ کتاب مطلوب اوس مین ہو $\frac{۱}{۴}$ × $\frac{۱}{۵}$ ہی پس ان دو پارسلون مین سے کتاب مطلوب کے نکلنی کا احتمال $\frac{۳}{۲۰}$ یعنی $\frac{۱}{۱۵}$ ہی پس کل احتمال $\frac{۴}{۱۵}$ + $\frac{۱}{۱۵}$ = $\frac{۵}{۱۵}$ ہے

(۳۲) ہم کو اول یہہ دریافت کرنا چاہیے کہ دوسرے تہیلی مین اشرفی کے ہونی کا کیا احتمال ہی جب اول تہیلی مین سے ۹ سکی نکال لی تو یہہ احتمال کہ اشرفی اوسمین سی نکلیگی $\frac{۹}{۱۰}$ ہی - اگر اشرفی نکلینگی تو دوسرے تہیلی مین ۸ روپیی اور ا اشرفی ہوگی اب ان مین ۹ سکو نکالی تو ۹ صورتین تو ایسی مین کہ اشرفی نکل گئی اور ۱۰ صورتین ایسے ہین کہ اشرفی اوسی مین پس اشرفی کے رہنے کا احتمال $\frac{۱۰}{۱۹}$ ہی پس یہہ احتمال کہ اشرفی دوسری تہیلی مین ہی $\frac{۹}{۱۰}$ × $\frac{۱۰}{۱۹}$ یعنے $\frac{۹}{۱۹}$ ہے - اسے معلوم ہوا کہ یہہ احتمال کہ اشرفی آخر کار اول تہیلی مین ہوگی $\frac{۱۰}{۱۹}$ ہے

(۳۳) اول تہیلی مین بعد گولی نکالتی کے یہہ چار ترتیبین ہونگی کہ چار سیاہ گولیان ۵ سفید گولیان ۵ سیاہ گولیان ۴ سفید گولیان ۶ سیاہ گولیان ۵ سفید - ۵ سیاہ گولیان ۶ سفید پس اس تہیلی مین سے سفید گولی نکلنی کا احتمال $\frac{۱}{۴}$ [$\frac{۴}{۹}$ + $\frac{۵}{۹}$ + $\frac{۵}{۱۱}$ + $\frac{۶}{۱۱}$] یعنی $\frac{۱}{۲}$ ہے اور علے ہذا القیاس دوسرے گولی سے ہی سفید گولی نکلنی کا احتمال $\frac{۱}{۲}$ ہی پس کوئی سی تہیلی ہم اٹہائین سفید گولے گولی نکلنی کا احتمال $\frac{۱}{۲}$ ہے

(۵۲) کل صورتین ن ہین $\frac{ن}{ا ص}$ اعداد ہین جو ن سے زائد نہین اور ا ص اونکا جزضربی ہے انمین سے اونکو خارج کرنا چاہئے جنمین ا ص + ۱ ایک جزضربی اور وہ $\frac{ن}{ا ص+۱}$ تعداد مین ہے
پس حسب مدعا صورتین $\frac{ن}{ا ص} - \frac{ن}{ا ص+۱}$ ہین

(۵۳) فرض کرو کہ زید کے ایک بازی جیتنے کا احتمال لا ہے
تو زید ۲ و ۳ یا ۴ ۰۰۰ بازیون مین دو بازیان جیت سکتا ہے پس لا کے کل
احتمالات $لا^۲ + (۱-لا) لا^۲ + لا (۱-لا) لا^۲ + (۱-لا) لا (۱-لا) لا^۲ + ۰۰۰$ ہین
مثلاً اگر زید چار بازیون مین جیتا ہے تو وہ اول بازی جیتی اور دوسری ہاری اور تیسری اور چوتھی جیتی پس زید کے جیتنے کے احتمالات دو ہندسی سلسلون غیر متناہی کے مرکب ہین ایک سلسلہ کا اول رقم لا ہے اور دوسرے کے اول رقم $(۱-لا) لا^۲$ ہے اور ہر ایک مین $لا (۱-لا)$ نسبت مشترک ہے
پس $\frac{لا^۲ + (۱-لا) لا^۲}{۱ - لا (۱-لا)}$ یعنے $\frac{لا^۲ (۲-لا)}{۱ - لا (۱-لا)}$ حاصل ہوگا اب بکر کے جیتنے کے احتمالات لا کے جگہہ ۱-لا رکھکر نکال سکتی ہین اسواسطے بکر کے جیت کا احتمال حاصل ہو جو زید کے جیت کے احتمال کو واحد مین سے تفریق کرین پس بکر کے جیت کا احتمال
$= \frac{(۱-لا)^۲ (۱+لا)}{۱ - لا (۱-لا)}$ اگر $لا = \frac{۲}{۳}$ تو ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ $\frac{۵}{۲۱}$ بکر کی جیت کا احتمال ہے
تاریخ احتمالات مین اس سوال کے توسیع دیکھو

(۵۴) چار پہلو پانسہ پر ۱ و ۲ و ۳ و ۴ خال ہونگے۔ ہشت پہلو پانسہ پر خال ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ ہونگے اب کل صورتین ۳۲ ہین ان مین سے
۲ حسب مدعا وہ صورتین ہین جنمین چار پہلو پانسہ کی ہوائی اور ۳ حسب مدعا وہ صورتین ہین جنمین چار پہلو مین دو آئین اور علی ہذا القیاس پس کل صورتین حسب مدعا ۳ + ۴ + ۵ + ۶ یعنی ۱۸ ہوئین

(۵۵) تمام واقعات کے نہ واقع ہونے کا احتمال $(۱-ع_۱)(۱-ع_۲)(۱-ع_۳)$ ہے
اسکو ایک مین سے تفریق کرو تو ہم کو ایک واقعہ کے وقوع کا احتمال معلوم ہوگا
دو واقعہ کم از کم واقع ہون تو اونکی صورتین یہہ ہین کہ تینون واقعہ وقوع مین آئین یا پہلا واقعہ

واقع ہو یا دوسرا یا تیسرا پس احتمال $ع_1 ع_2 ع_3 + (1-ع_1) ع_2 ع_3 + (1-ع_2) ع_1 ع_3 + (1-ع_3) ع_1 ع_2$

(۵۶) ایک ہی دفعہ میں ۱۰ کے آنے کا احتمال $\frac{3}{36}$ یعنی $\frac{1}{12}$ ہے مثال ۲ دیکھو اسلئے احتمال اس امر کا کہ زید اول دس پھینکے $\frac{1}{12}$ ہے اب اگر زید و بکر و عمر تینوں دس نہ پھینکیں تو زید کی دوبارہ پھینکنے کی باری آئیگی پس دوبارہ جیتنے کا احتمال $(\frac{11}{12})^3 \frac{1}{12}$ پس یہی معلوم ہوا کہ زید کی جیتنے کا احتمال ایک سلسلہ ہندسیہ ہے جسکی اول رقم $\frac{1}{12}$ ہے اور نسبت مشترک $(\frac{11}{12})^3$ ہے اور اسی طرح بکر و عمر کے جیتنے کے احتمالات سلسلے ہندسیہ ہیں جنکی نسبت مشترک $(\frac{11}{12})^3$ ہے اور اول رقم $\frac{11}{12} \cdot \frac{1}{12}$ اور $(\frac{11}{12})^2 \times \frac{1}{12}$ ہے

(۵۷) کسی خاص رتبہ کے ہندسوں پر اول خیال کرو مثلاً ساتویں مرتبے کے ہندسوں پر لو اوپر کا ہندسہ ۰ یا ۱ یا ۲ ... یا ۹ ہو سکتا ہے اور علے ہذا القیاس ایسی ہی اوسکے نیچے ہندسہ ہو سکتی ہیں پس کل ۱۰۰ صورتیں ہیں اب ہمیں دیکھنی چاہیے کہ ہمارے حسب مدعا کتنی ہیں اگر اوپر کا ہندسہ صفر ہو تو صرف ایک صورت حسب مدعا ہوگی یعنی جسمیں نیچے بھی اوسکے صفر ہو اور اگر اوپر کا ہندسہ ۱ ہو تو صرف دو صورتیں حسب مدعا ہونگیں یعنی جنمیں نیچے ۰ اور ۱ ہو گا اور علے ہذا القیاس۔ حسب مدعا صورتوں کی تعداد ۱ + ۲ + ۳ + ... + ۹ + ۱۰ یعنی ۵۵ ہوگی پس یہہ احتمال کہ اوپر کا ہندسہ نیچے کے ہندسہ سے بڑا نہ ہوگا $\frac{55}{100}$ ہے اور یہہ احتمال کہ ایسا ساتوں مرتبوں میں نہ ہوگا $(\frac{55}{100})^7$ ہے

(۵۸) ایک ہی دفعہ ۶ اور ۷ دو پانسوں سے پھینکنے کے احتمالات $\frac{5}{36}$ اور $\frac{6}{36}$ ہیں مثال ۸ دیکھو پس زید کے اول ہی دفعہ میں چھہ کے پھینکنے کا احتمال $\frac{5}{36}$ ہے اب اگر زید اور بکر متواتر ناکامیاب ہوں تو زید دوبارہ پانسہ پھینکیگا اور اوسکی دوبارہ جیتنے کا احتمال $\frac{31}{36} \cdot \frac{30}{36} \cdot \frac{5}{36}$ ہے اور علے ہذا القیاس پس زید کے جیتنے کا حاصل احتمال ایک سلسلہ ہندسیہ ہے جسکی اول $\frac{5}{36}$ ہے اور نسبت مشترک $\frac{31}{36}$ و $\frac{5}{6}$ ہے اور ایسی ہی بکر کے جیتنے کا احتمال ایک سلسلہ جسکی نسبت مشترک وہی ہے جو اوپر بیان ہوئی اور اول رقم $\frac{31}{36} \times \frac{1}{6}$ ہے

(۵۹) اب وہ کیا دو سورن نکالے گا یا ایک سورن ایک شلنگ یا دو نو شلنگ

اب انکے احتمالات ۳۵/۱۴۱ و ۱/۷ و ۳۵/۱۴۱ ہین پس روپیون کی توقع
۳۵/۱۴۱ × ۴۰ + ۱/۷ × ۲۱ + ۳۵/۱۴۱ × ۲ یعنی ۱۲ ہی یا اسطرح کہ جب وہ دو سکی نکالتا ہے
تو اونمین سے کسی خاص سکے کا نکالنی کا احتمال ۱/۳ ہے اسلئے
اوسکی توقع چار سورن مین سے ہر ایک کی ۱/۳ ہی اور ایسی ہی چار شلنگ مین ہر شلنگ کے
توقع ۱/۴ ہے پس اوسکی توقع ایک سورن اور ایک شلنگ کی ہے

(۶۰) یہہ احتمال کہ کوئی خاص سکہ نکلی ۱/۶ ہی پس ۹ اشرفی مین سے ہر ایک کے لئے
توقع ۱/۶ ہی اور ۹ روپیون مین سے ہر ایک کی لئے توقع ۱/۶ ہے اور ۱۹ اٹھنیون مین سے
ہر ایک کی توقع ۱/۶ ہی پس کل توقع مجموعہ ایک اشرفی اور روپیہ اور اٹھنی کا ہے

(۶۱) اب کل جہاز ۳۶ ہین اب انکی اجتماع دو دو کے ۳۶ × ۳۵ / ۱ × ۲ ہین یعنی ۱۸ × ۱۵
پس یہہ احتمال کہ جو دو جہاز اول اوٹین انمین ایک روسی اور دوسرا فرانسیسی ہو ۱۲ × ۱۰ / ۱۸ × ۳۵ ہے
پس روپیون کی توقع ۱۲ × ۱۰ / ۳۵ × ۱۸ × ۲۱۰۰ یعنے ۴۰۰ ہے

(۶۲) ۵۹ اور ۶۰ مثال کی طرح توقع شلنگون کی ۳/۹ (۶۳ + ۴۰ + ۴) یعنی ۱۰۷/۳ یعنی ۳۵ ۲/۳ ہی

(۶۳) روپیون کی توقع ۱/۱۰۰ [۵ × ۲۰ + ۵۰ × ۱۰ + ۱۰۰ × ۴]
یعنی ۱/۱۰۰ × ۱۰۰۰ یعنے ۱۰

(۶۴) فرض کرو کہ ہر سکہ کی قیمت لا شلنگ ہی تو شلنگون مین توقع ۲/۹ (۱۰۰ + ۴ + لا)
اور یہہ برابر ہے ۲۴ کے تو لا = ۲

(۶۵) فرض کرو کہ سونے کا سکہ لا شلنگ کا تہا اور چاندی کا ہر ایک سکہ ی شلنگ کا
تو شلنگ مین توقع ۴/۸ [لا + ۳ ی + ۴] اور یہہ برابر ۱۵ کے ہے اسواسطے
لا + ۳ ی = ۲۶ پس جو حل اس مین داخل ہو سکتا ہے لا = ۲۰ اور ی = ۲ ہے

(۶۶) مثال ۵۸ کی طرح زید اور بکر کے احتمالات جیتنی کے غیر متناہی سلسلے ہین
جنکی نسبت مشترک ۱/۴ ہی اور زید کے احتمال کے اول رقم ۱/۲ اور بکر کے احتمال کے اول رقم

۱/۳ ہے پس زید کا احتمال ۲/۳ اور بکر کا احتمال ۱/۳ ہے

فرضکرو کہ ہر ایک نے ۱ روپیہ دیا اور زید بکر کو لا روپیہ اول پھیکنی کے واسطے دیتا ہے

پس زید کے توقع روپیوں میں ۲/۳ × ۲ - لا اور بکر کی توقع ۱/۳ × ۲ + لا ہے

ان دونوں کو برابر لکھنے سے ۲ لا = ۲/۳ اسیواسطے لا = ۱/۳ کے

(۶۷) اگر م سکے ہوں جنپر توم ہی عدد اونپر لکھے ہونگے تو ان چھوٹے سکوں کے جو توقع روپیوں کی ہوسکتی ہے وہ ن/م ہے اسمیں ن کل عددوں کی تعداد ہے جو سکوں پر ہیں پس کل توقع روپیوں میں

م/ن [۱² + ۲² + ۳² ... + ر²] یعنی م/ن · ر(ر+۱)(۲ر+۱)/۶ اور ن = ۱ + ۲ ... + ر = ر(ر+۱)/۲ م

(۶۸) موافق مثال گذشتہ کے روپیوں کے توقع

۱/ن [۱³ + ۲³ + ... + ر³] اسمیں ن = ۱² + ۲² + ... + ر² دفعہ ۱۶۴ دیکھو

(۶۹) اب اعل یہہ خیال کرو کہ اوسکو ہی کیا توقع ہوسکتی ہے ظاہر کہ وہ ۵ یا ۵۰ یا ۵۰۰ یا ۵۰۰۰ روپیہ پا سکتا ہے اور انمیں سے ہر صورت کا احتمال یکسان پس اوسکی

توقع ۵(۱+۱۰+۱۰۰+۱۰۰۰+۱۰۰۰۰)/۵ یعنی ۵ × ۱۱۱۱۱/۵

اسی طرح سے ہم ۱ و ۲ و ۳ و ۴ پر عمل کریں تو روپیوں میں توقع اوسکی (۱+۲+۳+۴+۵)/۵ × ۱۱۱۱۱

(۷۰) فرضکرو کہ کسی سکے پر م عدد لکھی ہوتی ہیں تو اس سکے کے نکالنے کا احتمال م/ن ہے اور جو اس سکے کے نکالنے سے توقع ہے اوسکی امید م/ن ہے اسلیے تمام سکوں سے توقع م/ن ہے

(۷۱) اول تھیلی میں سے سفید گولی نکلنے کا احتمال ۸/۱۲ ہے اور دوسرے تھیلی میں سے سفید گولی نکلنے کا احتمال ۴/۱۲ ہے پس اول تھیلی میں سے سفید گولی کے نکلنے کے احتمال کو دوسرے تھیلی میں سے گولی نکلنے کے احتمال کے ساتھ ایسی نسبت ہے جیسی کہ ۲/۳ کو ۱/۴ یعنی ۸ کو ۳ کے ساتھ پس یہہ احتمال کہ سفید گولی پہلی تھیلی سے نکلے ۸/۱۱ ہے

(۷۲) گولیوں کے نکالنے سے پہلے ہم تھیلی میں سفید گولیوں کے ہر ایک تعداد کی لیے یکسان احتمال خیال کرسکتے ہیں

پس اس فرض کے موافق کہ پانچون گولیان سفید ہین ٢ سفید گولیون کے نکلنے کا احتمال ١ ہے
اور اس فرض کے موافق کہ چار سفید گولیان ہین + ٢ سفید گولیون کے نکلنے کا احتمال
٣/٥ ہے اور اس فرض کے موافق کہ تین سفید گولیان ہین احتمال ٣/١٠ ہے
اور اس فرض کے موافق کہ دو سفید گولیان ہین + احتمال ١/١٠ ہے پس دو سفید گولیون کے
نکالنے کے بعد سب گولیون کے سفید ہونے کا احتمال ١ ÷ [١ + ٣/٥ + ٣/١٠ + ١/١٠] یعنی ١/٢ ہے

(۷۳) اشرفی نکالنے سے پہلے تہیلی مین اشرفیون کے ہر ایک تعداد کی لئے یکسان احتمال خیال کر سکتے ہین
اب بموجب اس فرض کے کہ اوسمین ن ایک اشرفی تہی ایک اشرفی نکالنے کا احتمال ١/ن ہے اور
بموجب اس فرض کے کہ اوسمین دو اشرفیان تہین احتمال ٢/ن ہے پس بعد اشرفی نکالنے کے
اول فرض کا احتمال ١/ن ÷ [١/ن + ٢/ن + ... + ن/ن] یعنی ١ ÷ ن(ن+١)/٢ ہے

(۷۴) چہوٹی تہیلی مین جو دو گولیان نکال کر رکہی ہین اونکی صورتین دو طرح فرض کی جا سکتی ہین
یا تو دو نو سفید ہین یا ایک سفید ایک کالی بڑی تہیلی مین سے دو سفید گولیون کے نکلنے کا احتمال ٣/٢٨ ہے اور
ایک سفید گولی اور ایک سیاہ گولی نکلنے کا احتمال ١٥/٢٨ ہے اور بموجب اول فرض کے چہوٹی تہیلی مین سے دو نو دفعہ
سفید گولی نکلنے کا احتمال ١ ہے اور بموجب فرض دوم کے احتمال ١/٢ ہے پس جب گولیان نکال کر دیکہی گئین تو
اول فرض کا احتمال ٣/٢٨ ÷ [٣/٢٨ × ١ + ١٥/٢٨ × ١/٢] یعنی ٢/٥ ہے

(۷۵) اول تہیلی مین سے ٤ اشرفیون کے نکلنے کا احتمال ١ ہے اور دوسری تہیلی مین ٤ اشرفیون کے
نکلنے کا احتمال ٧×٨×٩×١٠ / ٢٢×٢٣×٢٤×٢٥ یعنی ٢١/١٢٦٥ ہے پس یہ احتمال کہ چارون اشرفیان اول تہیلی سے نکلی ہین
١ ÷ [١ + ٢١/١٢٦٥] یعنی ١٢٦٥/١٢٨٦ ہے اور یہ احتمال کہ چارون اشرفیان دوسری تہیلی سے
نکلی ہین ٢١/١٢٨٦ ہے پس ١٢٦٥/١٢٨٦ کے جگہہ ع رکہو اب جس تہیلی مین ٢١ اشرفیان ہین
اوسمین سے دوبارہ سکہ نکالنے کا احتمال ع ہے اور ١٧ ع اشرفیون کی توقع ہو سکتی ہے اور
جس تہیلی مین ١٦ اشرفیان اور ٥ روپئے ہین اوسمین سے دوبارہ سکہ نکالنے کا احتمال ١ – ع ہے
اسسے یہہ توقع ہو گی کہ (١ – ع) [٦/٢١ اشرفی + ١٥/٢١ روپیہ] یعنی (١ – ع) × ٦/٢١ اشرفی

اسے معلوم ہوا کہ کل توقع $\frac{۱۲۶۵}{۱۲۸۶} \times \frac{۱۱۱}{۱۲۸۶ \times ۱۶}$

(۷۶) اب نوٹوں کے باب میں چھ فرض ہو سکتی ہیں اور ہر فرض کا احتمال نوٹوں کے نکالنے سے پہلے $\frac{۱}{۶}$ ہے
اول فرض کہ تینوں نوٹ پانچ پانچ روپیہ کے ہوں دوم پانچ پانچ روپیہ کے دو اور ایک ۱۰ روپیہ کا
سوم پانچ پانچ روپیہ کے دو اور ایک بیس روپیہ کا چہارم ایک پانچ روپیہ کا دو دس دس روپیہ کے پنجم
ایک پانچ روپیہ کا دو بیس بیس روپیہ کے ششم ایک پانچ روپیہ کا دوسرا دس روپیہ کا تیسرا بیس روپیہ کا۔
ان فرضوں کے موافق نوٹوں کے نکلنے کے احتمالات یہ ہیں

۱ و $(\frac{۲}{۳})^۳$ و $(\frac{۲}{۳})^۳$ و $(\frac{۱}{۳})^۳$ و $(\frac{۱}{۳})^۳$ و $(\frac{۱}{۳})^۳$

پس نوٹوں کے نکلنے کے بعد فرضوں کے احتمالات یہ ہیں
$\frac{۲۷}{۴۶}$ و $\frac{۸}{۴۶}$ و $\frac{۸}{۴۶}$ و $\frac{۱}{۴۶}$ و $\frac{۱}{۴۶}$ و $\frac{۱}{۴۶}$ پس کل مال کے قیمت کا احتمال
$\frac{۱}{۴۶}[۳۵+۴۵+۲۵+۳۰\times۸+۲۰\times۸+۱۵\times۲۷]$ یعنے $\frac{۹۱۰}{۴۶}$ ہے

(۷۷) اب دو فرض یہاں ہو سکتی ہیں کہ واقعہ واقع ہوا یا نہیں تو بموجب اول فرض کے زید کے
اظہار اور بکر کے اظہار اور عمر کے انکار کا احتمال $\frac{۳}{۱۰} \times \frac{۴}{۵} \times \frac{۱}{۲}$ اور بموجب فرض دوم $\frac{۱}{۱۰} \cdot \frac{۱}{۵} \cdot \frac{۱}{۲}$ ہے
تو اسے معلوم ہوا کہ اول فرض کا احتمال $\frac{۱۲}{۱۴۰} \div [\frac{۱۲}{۱۴۰} + \frac{۶}{۱۴۰}]$ یعنے $\frac{۱۲}{۱۸}$ ہے

(۷۸) یہ ۷۵۴ کی ایک مثال ہے اور ع = $\frac{۳}{۱۰}$ اور ع = $\frac{۴}{۵}$ اور ن = ۹
پس سچ کے واسطے نسبت موافق ایسے ہے جیسے $\frac{۳}{۵}$ کو نسبت ہے $\frac{۱}{۱۴۰}$ سے یعنے
جو ۹۶ کو ہے ۱ سے

(۷۹) فرض کرو کہ تیرہ گواہ ہیں اور ہر ایک کے سچ ہونے کا احتمال ع ہے اور واقعہ کی واقع ہونے کا
احتمال پہلی سے ق ہے تو بموجب صفحات ۷۵۲ اور ۷۵۳ کے احتمال وقوع واقعہ احتمال عدم وقوع
واقعہ سے ایسی نسبت رکھتا ہے جیسا کہ $ع^{۱۳}$ ق کو نسبت ہے (۱-ق) $(۱-ع)^{۱۳}$ یعنی اگر
ع = $\frac{۹}{۱۰}$ تو نسبت وہ ہوگی جو $۹^{۱۳}$ ق کو ہے ۱-ق اور یہ نسبت ۱ اور [illegible] کی نسبت ہے
اگر ق = $\frac{۱}{۱+۱۰^{۱۲}}$

(۸۰) چار بازیان طاش مین ہوتی ہین پس ورق کے گم ہوجانے سے یعنی میر کے گم ہونیکا احتمال $\frac{۱}{۴}$ ہی اور یہہ احتمال کہ وہ میر نہین ہے $\frac{۳}{۴}$ ہی پس اگر میر گم ہوا ہو تو دو میرون کے نکالنے کا احتمال $\frac{۱۱\times۱۲}{۵۰\times۵۱}$ اگر میر گم نہ ہوا ہو تو $\frac{۱۲\times۱۳}{۵۰\times۵۱}$ پس جب دو میرون کا نکلنا دیکھہ چکے تو میر کے گم ہونیکا احتمال $\frac{۱}{۴}\cdot\frac{۱۱\times۱۲}{۵۰\times۵۱} \div \left[\frac{۱}{۴}\cdot\frac{۱۱\times۱۲}{۵۰\times۵۱}+\frac{۳}{۴}\cdot\frac{۱۲\times۱۳}{۵۰\times۵۱}\right]$ یعنی $\frac{۱۱}{۵۰}$ ہے

(۸۱) اول ہم احتمال اس امر کا دریافت کرین کہ آدمی نہین ملتے ہین اور پہلی آدمی کا نام زید اور دوسرے آدمی کا نام بکر ہے اگر وہ دونو سڑک پر نہین ملتے تو زید اوس سری پر پہونچ لے گا جہان بکر کھڑا ہے تو بکر چلے گا یا بکر اوس سری پر پہونچ لے گا کہ جہان زید کھڑا ہے تو زید چلے گا اب ہم ثابت کرتے ہین کہ ان دونو دفعات مین سے ہر ایک واقعہ کا احتمال $\frac{ح^۲}{۲(ا+ح)(ب+ح)}$ ہے زید بکر کے سرے پر ب+ح منٹون کے آخر مین کسی لحظہ مین پہونچیگا اور بکر اپنی سرے کو ا+ح منٹون کے اول منٹ کے کسی لمحہ پر چلیگا پس زید کے پہونچنے اور بکر کے چلنے کا احتمال $\frac{ح^۲}{(ا+ح)(ب+ح)}$ ہے یہہ دونو باتین ح منٹون مین جو مشترک دونو وقفون مین واقع ہوتی ہین اور چونکہ ایک واقعہ کے وقوع کا دوسرے واقعہ کے واقع ہونے سے پہلی اور پیچھے ایک ہی احتمال ہے اسلیے $\frac{ح^۲}{۲(ا+ح)(ب+ح)}$ احتمال زید کے پہونچنے کا پہلے بکر کے چلنے سے ہے اور یہی احتمال بکر کے زید کے سرے پر پہونچنے کا پہلے زید کے چلنے سے ہے پس اسی معلوم ہوا کہ اونکی ملنے کا احتمال $۱-\frac{ح^۲}{(ا+ح)(ب+ح)}$ ہے

(۸۲) اول ہم یہہ ثابت کرینگے کہ ن طاق اعداد کے ضرب دینے مین اس امر کا احتمال کہ اونکے اول ہندسہ ۵ ہو $(\frac{۴}{۵})^ن$ ہے طاق اعداد کے اول ضروری ہے کہ اعداد ۱ و ۳ و ۵ و ۷ و ۹ مین سے کوئی عدد ہو پس $\frac{۴}{۵}$ احتمال اس امر کا ہے کہ وہ ۵ کا ہندسہ نہو ن طاق اعداد کے حاصل ضرب کے اول ہندسہ ۵ کا نہ ہو اسکی لئی ضرور ہے کہ ن اجزاء ضربی مین سے ہر جزء ضربی کے اول ۵ نہ ہو پس یہہ احتمال $(\frac{۴}{۵})^ن$ ہے پس احتمال اس امر کا کہ حاصل ضرب کا آغاز ۵ سے ہوتا ہے $۱-(\frac{۴}{۵})^ن$ ہے اسواسطے ہم یہہ جانتے ہین کہ

۱ - (۴/۵)^ن جھوٹا ۱/۲ سے نہ ہو یعنے (۴/۵)^ن بڑا ۱/۲ سے نہ ہو

فرض کرو کہ (۴/۵)^لا = ۱/۲ یعنے (۸/۱۰)^لا = ۱/۲ پس لا لوگ ۸/۱۰ = لوگ ۱/۲ اسیواسطے

لا (لوگ ۱۰ - لوگ ۸) = لوگ ۲ یعنی لا = لوگ ۲ / (۱ - ۳ لوگ ۲) پس لوگ ۲ کے قیمت معلوم ہونیسے

ہم کو یہہ دریافت ہوتا ہی کہ ۳ اور ۴ کے درمیان لا واقع ہوتا ہے پس یہہ معلوم ہوا کہ

کم سے کم مثبت صحیح قیمت ن کی ۴ ہے جو (۴/۵)^ن کو کم ۱/۲ سے کرتی ہے

چونوان باب

(۱) مجذور کرو تو ۲ - ۲ √(۱ - لا^۲) = ۱ - لا^۲ اسیواسطے [√(۱ - لا^۲) + ۱]^۲ = ۳

اسیواسطے √(۱ - لا^۲) = ± √۳ - ۱ اسکا پھر مجذور کرو تو لا^۲ کی قیمت معلوم ہوجائیگی

(۲) اول مساوات سی لا = ا ر (ر - ن) / (ب - ر) اسکو دوسرے مساوات مین مندرج کرو تو

ر^۲ (ا - لا) = ب ا ر (ر - ن) / (ب - ر) - ب ن لا اسواسطے ا ر^۲ - ب ا ر (ر - ن) / (ب - ر) = (ر^۲ - ب ن) لا

یعنے - ا ر (ر^۲ - ب ن) / (ب - ر) = (ر^۲ - ب ن) لا پس کیا تو ر^۲ - ب ن = ۰ یا

- ا ر / (ب - ر) = لا اگر ہم ر^۲ = ب ن لین تو معلوم مساواتون مین سے دوسرے مساوات

لا^۲ = ا ن اور اگر ہم لا = ا ر / (ر - ب) کے لین اور معلوم مساواتون مین سے کسی مین

رکھین تو یہہ دریافت ہوگا کہ ر صفر ہے اور ایک قیمت اس مساوات درجہ دوم ر^۲ + (ا - ب - ن) ر + ا ن = ۰ ب ن

(۳) دوسرے مساوات کو اول مساوات مین سے تفریق کرو تو (ر - ی) (لا + ر + ی) = ح^۲ - ب^۲

اور اسی قبیل کے نتیجے تیسرے مساوات کو دوسرے مساوات مین سے اور اول مساوات کو تیسرے مساوات مین سے

تفریق کرنے سے حاصل ہوتے ہین - مجذور کرو اور جمع کرو تو

(لا + ر + ی)^۲ (لا^۲ + ر^۲ - ر ی - ی لا - لا ر) = ا^۴ + ب^۴ + ح^۴ - ب^۲ ح^۲ - ح^۲ ا^۲ - ا^۲ ب^۲

تینون مساواتون کو جمع کرو تو

لا^۲ + ر^۲ + ی^۲ = ۱/۲ (ا^۲ + ب^۲ + ح^۲ - ر ی - ی لا - لا ر)

یہہ قیمت لا^۲ + ر^۲ + ی^۲ کو مساوات مذکور مین مندرج کرو تو

بموجب مسئلہ جملہ تناسبہ کے دونو جملہ تناسبیہ کو دو دو رقمون تک پہیلاؤ اور جمع کرو تو تقریباً یہہ ہم کو حاصل ہوگا کہ

$$2\left(\frac{ع}{ن}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{ع+ن}{2ن} + \frac{2ع}{ع+ن} - \frac{(ع-ن)^2}{4ن(ع+ن)} + \frac{ع(ع-ن)^2}{(ع+ن)^3}$$

اخر کی دونو رقمین مساوی ہین $\frac{(ع-ن)^2}{(ع+ن)^2}\left[\frac{ع}{ع+ن} - \frac{ع+ن}{4ن}\right]$ یعنی $-\frac{(ع-ن)^2}{4ن(ع+ن)^2}$ اسیواسطے

$$\left(\frac{ع}{ن}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{ع}{ع+ن} + \frac{ع+ن}{4ن} - \frac{(ع-ن)^2}{8ن(ع+ن)^2}$$ تقریباً بدرجہ غایت

(۸) فرضکرو کہ $س_ن$ سرمایہ کے روپیون کو ن وین سال کے شروع مین تعبیر کرتا ہی تو ن وین سال کے اندر امدنی $\frac{3س_ن}{100} + 200$ ہوگی اور خرچ $\frac{5}{4}\left(\frac{3س_ن}{100} + 200\right) - 95$ ہوگا پس بچت $95 - \frac{1}{4}\left(\frac{3س_ن}{100} + 200\right)$ یعنی $45 - \frac{3س_ن}{400}$ ہے اسیواسطے

$س_{ن+1} = س_ن + 45 - \frac{3س_ن}{400}$ اور یہہ اسطرح سے لکھا جا سکتا ہے کہ

$$س_{ن+1} - 6000 = \frac{397}{400}\left(س_ن - 6000\right)$$

پس اگر ۶۰۰۰ متواتر سالون کے اخر مین جو سرمایہ ہو اوسکی تعداد سے تفریق کیا جاے تو باقیات سے ایک سلسلہ ہندسیہ پیدا ہوگا جسکی نسبت مشترک $\frac{397}{400}$ ہوگی اسیواسطے

$$س_{ن+1} - 6000 = \left(س_1 - 6000\right)\left(\frac{397}{400}\right)^ن$$ اب $س_1 - 6000$ کے

خواہ کچھہ ہی بچت ہو ہم ن کو اتنا بڑا فرض کر سکتے ہین کہ حاصل ضرب اسکا $\left(\frac{397}{400}\right)^ن$ جتنا چاہین چھوٹا ہو تو $س_{ن+1} - 6000$ صفر سے فرق ایسا نہ رکھے گا جو لحاظ کے قابل ہو

اگر $س_1 = 1000$ تو $س_{ن+1} - 6000 = -5000\left(\frac{397}{400}\right)^ن$ اسکو برابر -4000 کے رکھو تو $\left(\frac{397}{400}\right)^ن = \frac{4}{5} = \frac{8}{10}$ اسیواسطے $ن \;\text{لوک}\; \frac{397}{400} = \text{لوک}\; \frac{8}{10}$ اسیواسطے $ن = \frac{\text{لوک}\,10 - \text{لوک}\,8}{\text{لوک}\,400 - \text{لوک}\,397} = \frac{1 - 3\,\text{لوک}\,2}{2 + 2\,\text{لوک}\,2 - \text{لوک}\,397}$ اور یہہ ۳۰ سے کچھہ ہی کم ہے اسی معلوم ہوا کہ اکتیسوین سال کے شروع مین سرمایہ کچھہ ۲۰۰۰ روپیہ سے زیادہ ہوگا

(۹) $\frac{۱}{۱-\text{لا}+\text{ح}\,\text{لا}^{۲}} = \frac{۱}{۱-\text{لا}}\left(۱+\frac{\text{ح}\,\text{لا}^{۲}}{۱-\text{لا}}\right)^{-۱} = \frac{۱}{۱-\text{لا}} - \frac{\text{ح}\,\text{لا}^{۲}}{(۱-\text{لا})^{۲}} + \frac{\text{ح}^{۲}\,\text{لا}^{۴}}{(۱-\text{لا})^{۳}} \cdots$

اب تمہین سے ہر رقم کو پھیلاؤ اور اونمین $\text{لا}^{\text{ن}}$ کے سر منتخب کرو جسطرح باب ۰۵ مثال ۳ مین کیا تھا اور پھر $\frac{\text{م}}{(\text{م}+۱)^{۲}}$ کو بجای ح کی رکہو تو یہہ حاصل ہوگا کہ $۱-\text{لا}+\text{ح}\,\text{لا}^{۲} = \text{ح}\left(\frac{\text{م}+۱}{\text{م}}-\text{لا}\right)(\text{م}+۱-\text{لا})$

اسواسطے $\frac{۱}{۱-\text{لا}+\text{ح}\,\text{لا}^{۲}} = \frac{\text{م}+۱}{\text{م}-۱}\left(\frac{۱}{\frac{\text{م}+۱}{\text{م}}-\text{لا}} - \frac{\text{م}}{\text{م}+۱-\text{لا}}\right)$ اور اسکو پہیلانے سے

$\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر $= \frac{\text{م}}{\text{م}-۱}\left(\frac{\text{م}}{\text{م}+۱}\right)^{\text{ن}} - \frac{۱}{\text{م}-۱}\left(\frac{۱}{\text{م}+۱}\right)^{\text{ن}}$

(۱۰) فرض کرو کہ $(۱+\sqrt{۲})^{\text{لا}}$ کا صحیح حصہ ص سے تعبیر ہوتا ہے اور ک سے کسری حصہ تو بموجب علم جبر کے ثنائیہ کے

$\text{ص}+\text{ک} = ۱+\text{لا}\,۲^{\frac{۱}{۲}} + \frac{\text{لا}(\text{لا}-۱)}{\lfloor ۲}\,۲ + \frac{\text{لا}(\text{لا}-۱)(\text{لا}-۲)}{\lfloor ۳}\,۲^{\frac{۳}{۲}} + \cdots$

اب $۱-\sqrt{۲}$ ایک منفی کسر واجب ہے اسواسطے $(۱-\sqrt{۲})^{\text{لا}}$ بھی منفی کسر واجب ہوگی اسکو $-\text{کَ}$ سے تعبیر کرو تو

$-\text{کَ} = ۱-\text{لا}\,۲^{\frac{۱}{۲}} + \frac{\text{لا}(\text{لا}-۱)}{\lfloor ۲}\,۲ + \frac{\text{لا}(\text{لا}-۱)(\text{لا}-۲)}{\lfloor ۳}\,۲^{\frac{۳}{۲}} + \cdots$

جمع کرنے سے $\text{ص}+\text{ک}-\text{کَ} = ۲+۲\,\frac{\text{لا}(\text{لا}-۱)}{۲}\,۲ + \cdots$

اسے معلوم ہوا کہ ک − کَ برابر صفر کے ہوا اور ص − ۲ برابر ایک ایسے سلسلہ کے ہے جسکے ہر رقم پورے ۲×۲ لا یعنے ۴لا پر تقسیم ہوتی ہے

(۱۱) فرض کرو کہ ن صحیح اعداد آپسمین ضرب دی گئی ہین ہر صحیح عدد مین اول ہندسہ ۰، ۱ اور ۲ ،،،، ۹ ہوسکتی ہین اسلئے کل صورتین $۱۰^{\text{ن}}$ ہین اور جسقدر عادہ صورتین جنمین اول عدد طاق ہو اور ایک پانچ یا زیادہ پانچ ہون اب $۵^{\text{ن}}$ صورتین ہین جنمین اول ہندسہ طاق ہو اور $۴^{\text{ن}}$ صورتین وہ ہین جنمین اول ہندسہ ۵ نہین ہے پس $۵^{\text{ن}}-۴^{\text{ن}}$ صورتین ہین جنمین اول ہندسہ طاق ہے اور ایک پانچ یا زیادہ پانچ اونکے اول ہین اسواسطے احتمال $\frac{۵^{\text{ن}}-۴^{\text{ن}}}{۱۰^{\text{ن}}}$ ہے اسیواسطے جب ن+۱ ہندسون کو آپسمین ضرب دینگے تو احتمال $\frac{۵^{\text{ن}+۱}-۴^{\text{ن}+۱}}{۱۰^{\text{ن}+۱}}$ ہے اور یہہ چھوٹا $\frac{۵^{\text{ن}}-۴^{\text{ن}}}{۱۰^{\text{ن}}}$ سے ہے کسرون کے نسب نما یکسان کرنے سے یہہ امر ظاہر ہوجایگا

(۱۴) فرضکرو کہ اول تھیلی مین ا اشرفیان اور م روپیے ہین اور دوسرے تھیلی مین ب اشرفیان اور ن روپیے ہین پس ایک تھیلی جو بے تامل اٹھائی جائی اوسمین سے ایک اشرفی نکلنی کا احتمال

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\text{ا}}{\text{ا}+\text{م}} + \frac{\text{ب}}{\text{ب}+\text{ن}}\right)$$

پس اگر سب سکی ایک تھیلی مین رکھہ دی جائین تو اوسمین سے ایک اشرفی نکلنی کا احتمال $\frac{\text{ا}+\text{ب}}{\text{ا}+\text{ب}+\text{م}+\text{ن}}$ ہے یہہ احتمالات برابر ہین اگر

$$(\text{ا}+\text{ب}+\text{م}+\text{ن})\,[\,\text{ا}(\text{ب}+\text{ن}) + \text{ب}(\text{ا}+\text{م})\,] = 2(\text{ا}+\text{ب})(\text{ا}+\text{م})(\text{ب}+\text{ن})$$

سب قسمون کو ایک طرف لاؤ اور سادہ بناؤ تو اونکی تحویل اور اختصار یہہ ہوگا کہ

$(\text{ب}\text{م} - \text{ا}\text{ن})(\text{ا}+\text{م}-\text{ب}-\text{ن}) = 0$ اسے مثال کا اول جزو ثابت ہوا

دوم فرضکرو کہ ا + م بڑا بہ نسبت ب + ن کے ہے تو اس تھیلی کے بے تامل اٹھائی کا احتمال قوی ہے بشرطیکہ $(\text{ب}\text{م} - \text{ا}\text{ن})(\text{ا}+\text{م}-\text{ب}-\text{ن})$ ایک مثبت ہے اور یہہ مثبت اوس حالت مین ہے کہ ا م چھوٹا بہ نسبت ب م کے ہو اور اسیواسطے $\frac{\text{ا}}{\text{م}}$ چھوٹا بہ نسبت $\frac{\text{ب}}{\text{ن}}$ کے ہو پس اسی مثال کا دوسرا جزو ثابت ہے

پچپین وان باب

(۲) دفعات ۳۰۷ اور ۳۰۸ کو دیکھو

(۳) فرضکرو کہ مسطاس کو لا تعبیر کرتا ہے تو $1440 = 4\,\text{لا}^{2} + 4\,\text{لا}$

(۴) $\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-2} = 1 + 2\times\frac{1}{2} + 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{3} + \cdots$ مین سے ۲ کو تفریق کرو

$$2 = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{2} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{3} + \cdots$$

(۵) فرض کرو کہ منتخب کرنے والے لا تھے تو امیدوار ۲ لا + ۱ ہونگے ۲ لا + ۱ کو ن سے تعبیر کرو پس اب ن طور ہونگے جو ایک آدمی کے انتخاب کے لئی انتخاب کرنے والا اپنے راے ظاہر کرسکتا ہے اور $\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2}$ طور ہونگے جو دو آدمیون کے انتخاب کے لئے انتخاب کرنے والا اپنی راے ظاہر کرسکتا ہی اور $\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)}{\underline{|3}}$ طور ہونگے

$\frac{(1+\frac{ب}{ر})(1+\frac{ص}{ر})}{(1+\frac{ج}{ر})(1+\frac{1}{ر})}$ ہے اسکو مر+۱ سے تعبیر کرو تو

لوگ مر+۱ = لوگ (۱+ ب/ر) + لوگ (۱+ ص/ر) - لوگ (۱+ ج/ر) - لوگ (۱+ ۱/ر) فرض کرو ر اسیا بڑا ہی کہ ب/ر و ص/ر و ج/ر تمام کسور واجب ہین تو ہم کو پہیلانے سے یہہ حاصل ہوگا کہ

لوگ مر+۱ = $\frac{ب+ص-ج-1}{ر} - \frac{ب^2+ص^2-ج^2-1}{2ر^2} + \ldots$

اگر ب + ص - ج - ۱ مثبت ہی لوگ مر+۱ کی نسبت محدود ۱/ر کے ساتھہ ہے اس سبب سے سلسلہ جسے لوگ بن بنتا ہی انفراجی او مثبت ہی اسواسطے بن غیر محدود ن کے ساتھہ بڑھتا ہے

(۴) مثال ۳ کی طرح عمل کرو اگر ب + ص - ج - ۱ = ۰ تو لوگ مر ر+۱ نسبت محدود ۱/ر² کے ساتھہ رکھتی ہی اسیواسطے لوگ بن محدود ہی جب ن غیر محدود زیادہ ہوتا ہی اسواسطے بن محدود ہی جب ن غیر محدود زیادہ ہوتا ہے

(۵) مثال ۳ کی طرح عمل کرو اگر ب + ص - ج - ۱ منفی ہو تو وہ سلسلہ جسے لوگ بن زیادہ ہوتا ہے انفراجی اور منفی ہی اسیواسطے لوگ بن منفی ہی اور تعداد میں ن کے ساتھہ غیر محدود زیادہ ہوتی ہی اسیواسطے بن غیر محدود چہوٹا ہوتا ہے جب ان غیر محدود زیادہ ہوتا ہے

(۶) یہاں $\frac{ب_ن}{ب_{ن+1}} = \frac{ن+1}{(ن+1)لا}$ - پس بموجب دفعہ ۶۲، کے یہہ سلسلہ انضمامی ہی اگر لا ایک سے چہوٹا ہی اور انفراجی ہے اگر لا بڑا واحد سے ہو اگر لا واحد ہی تو بموجب دفعہ ۶۲، یہہ فیصلہ نہ ہوگا لا = ۱ کے رکہو تو

$ن\left(\frac{ب_ن}{ب_{ن+1}} - 1\right) = \frac{ن(1-1)}{ن+1} = \frac{1-1}{\frac{1}{ن}+1}$

اگر ا منفی ہی تو بموجب دفعہ ۶۶، کی سلسلہ انضمامی ہی اور اگر ا مثبت ہی تو بموجب دفعہ ۶۷، کی سلسلہ انفراجی ہے

(۷) بن بس ن بسر(ن) = $\frac{ن \text{ لوگ } ن}{ن^{\frac{1+ن}{ن}}} = \frac{\text{لوگ } ن}{ن^{\frac{1}{ن}}}$ یہہ غیر محدود زیادہ ہی جب ن غیر محدود ہے

اسواسطے کہ ن^(۱/ن) واحد ہوتا ہی کیونکہ اوسکی لوگارثم $\frac{1}{ن}$ لوگ ن ہی فنا ہوجاتا ہی بموجب دفعہ ۴۹، کے

اسے معلوم ہوا کہ سلسلہ جسکی نونی رقم سن ہے انفراجی ہی بموجب دفعہ ۱۷ کے

(۸) یہان $\frac{س_ن}{س_{ن+۱}} = \frac{۲ن-۱}{۲ن-۳} \cdot \frac{۲ن-۲}{۲ن-۳} \cdot \frac{۱}{لا}$ پس بموجب دفعہ ۶۲ کے سلسلہ انفراجی ہی اگر لا چھوٹا ہی واحد سے اور انضمامی ہی اگر لا بڑا ہو واحد سے اگر لا = ۱ تو $ن\left(\frac{س_ن}{س_{ن+۱}} - ۱\right) = ن\left[\frac{(۲ن-۱)(۲ن-۲)}{(۲ن-۳)^۲} - ۱\right]$

$= \frac{۲ن^۲ - ۷ن}{(۲ن-۳)^۲}$ اور سلسلہ بموجب دفعہ ۶۶ کے انضمامی ہے

(۹) یہان $\frac{س_ن}{س_{ن+۱}} = \frac{ن^۲}{(ن-۱+صہ)(ن-صہ)} = \frac{ن^۲}{ن^۲ - ن + صہ(۱-صہ)}$ بموجب طریقہ کتابت دفعہ ۶۶ کے ہم کو یہہ حاصل ہے کہ ا - ط - ۱ = ... پس سلسلہ انفراجی ہے

(۱۰) یہان $\frac{س_ن}{س_{ن+۱}} = \frac{ن^ع}{(ن-۱)^ع} \times \frac{(ن+۱)^ق}{ن^ق} = \frac{ن^{ع+ق}}{ن^{ع+ق} + (ع-ق)ن^{ع+ق-۱} + \dots}$

بموجب طریقہ کتابت دفعہ ۶۶ کے ہم کو یہہ حاصل ہی کہ ا - ط - ۱ = ق - ع - ۱ لہذا سلسلہ انضمامی ہی اگر ق - ع - ۱ مثبت ہی اور انفراجی ہی اگر ق - ع - ۱ منفی یا صفر ہے

(۱۱) فرض کرو کہ ن کے کسی خاص قیمت سے یا اوسکی مابعد سے لا لوگ $\frac{س_ن}{س_{ن+۱}}$ ہمیشہ بڑی لا سے ہی اور لا مثبت اور بڑا واحد سے ہی پس لوگ $\frac{س_ن}{س_{ن+۱}}$ بڑا $\frac{لا}{ن}$ سے ہے اور اسیواسطے جب ن کما منتہی بڑا ہو تو لوگ $\frac{س_ن}{س_{ن+۱}}$ بڑا بہ نسبت لوگ $\left(۱ + \frac{لا}{ن}\right)$ کے ہی دفعہ ۸۷ دیکھو اسیواسطے جب ن کما منتہی بڑا ہوا $\frac{س_ن}{س_{ن+۱}}$ بڑا $۱ + \frac{لا}{ن}$ سے ہوا اور اسیواسطے دفعہ ۶۶ کی طرح سلسلہ جسکی ن وین رقم سن ہے انضمامی ہے

(۱۲) یہان ن کی کسی معین قیمت سے یا اوسکی مابعد سے لوگ مثبت ہی اور $\frac{۱}{ن}$ سے بڑی نہین ہے، یا منفی ہی اول صورت مین لوگ $\frac{س_ن}{س_{ن+۱}}$ چھوٹا لوگ $\frac{ن}{ن-۱}$ سے بموجب دفعہ ۸۸ کے ہی اور اسیواسطے $\frac{س_ن}{س_{ن+۱}}$ چھوٹا بہ نسبت $\frac{ن}{ن-۱}$ کے ہے اور دوسری صورت مین $\frac{س_ن}{س_{ن+۱}}$ چھوٹا بہ نسبت واحد کے ہی پس دونو صورتون مین $\frac{س_ن}{س_{ن+۱}}$ چھوٹا $\frac{ن+۱}{ن}$ سے ہی اسی معلوم ہوا کہ دفعات ۶۵ اور ۶۲ کے موافق سلسلہ جسکی نونی رقم سن ہے انفراجی ہے

(۱۳) یہان $\frac{س_ن}{س_{ن+۱}} = \frac{(ن+۱)(۱+ن لا)}{(۱+ن لا+لا)ن+۱} = \frac{۱}{لا\left(۱+\frac{۱}{ن لا+لا}\right)} \left(۱+\frac{لا}{ن لا+۱}\right)^ن$

اسیواسطے لوگ س ن / س ن+۱ = - لوگ لا - لوگ (۱ + د / ن لا + لا) - ن لوگ (۱ + لا / ن لا + د)

= - لوگ لا - ن د / ن لا + لا + د / ۲ (ن لا + لا)۲ ... - ن لا / ن لا + د + ن لا / ۲ (ن لا + د)۲ - ...

لیکن ن لا / ن لا + د = ۱ - د / ن لا + د پس ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے

لا لوگ س ن / س ن+۱ = ن [- لوگ لا - ۱ + د / ن لا + د - د / ن لا + لا + د / ۲ (ن لا + لا)۲ + ن لا / ۲ (ن لا + د)۲ + ...]

اگر لا بڑا ہی اسی سی تو - لوگ لا - ۱ منفی ہی اور سلسلہ انفراجی بموجب مثال ۱۲ کے اگر لا چھوٹا ہی اسی سی تو - لوگ لا - ۱ مثبت ہی اور سلسلہ انضمامی بموجب مثال ۱۱ کی ہی اگر لا = ی تو - لوگ لا - ۱ = ۰ اس صورت مین ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

ن لوگ س ن / س ن+۱ = ن لا / ۲ (ن لا + د)۲ + ن د (لا - د) / (ن لا + د) (ن لا + لا) + ... اور ن کو کا ینبغی بڑا فرض کرنے سے اسکو جتنا چاہین ۱/۲ کے قریب کر سکتی ہین اسواسطے سلسلہ بموجب مثال ۱۲ کے انفراجی ہے

(۱۴) ہم کو اس صورت کا امتحان کرنا چاہی جسمین لا = ۱ تو

س ن / س ن+۱ = (ن + ۱) (ن + ر) / (ن + س) (ن + ص) = (۱ + ۱/ن) (۱ + ر/ن) / (۱ + س/ن) (۱ + ص/ن)

اول فرض کرو کہ ر - ص - ص مثبت ہے

تو ایک مقدار ص بڑی ایک سے ایسی دریافت ہوسکتی ہی کہ جب ن کا ینبغی بڑی ہو تو س ن / س ن+۱ بڑا ۱ + ص / ن سے ہو اسواسطے کہ یہہ حاصل ہوسکتا ہی اگر ۱ + ۱/ن + ر/ن بڑا (۱ + ص/ن) (۱ + س/ن + ص/ن) ہو یعنی اگر ر + ۱ - س - ص - ص بڑا ص (س + ص) + ص ص - ر / ن + ص س ص / ن۲ سے ہو

اور یہہ شرط ن کو کا ینبغی بڑا فرض کرنے سے ہوسکتی ہی اب بموجب دفعہ ۶۸۹ ایک مثبت مقدار ع واحد سے بڑی ایسی دریافت ہوسکتی ہی کہ جب ن کا ینبغی بڑا ہو تو (ن + ۱ / ن)ع چھوٹا ۱ + ص / ن سے ہو پس اسے معلوم ہوا کہ جب ن کا ینبغی بڑا ہو تو س ن / س ن+۱ بڑا (ن + ۱ / ن)ع سے ہی بموجب دفعہ ۵۹۲ کے سلسلہ جسکی ن وین رقم ۱ / ن ع ہے انضمامی ہی جب ع مثبت ہو اور ایک سے بڑا ہو پس اسی ثابت ہوا کہ بموجب دفعہ ۶۷۴ کے سلسلہ جسکے نونی رقم س ن ہے انضمامی ہے

دوم فرض کرو کہ ر - س - ص صفر ہے

تو $\frac{\text{س}_\text{ن}}{\text{س}_{\text{ن}+1}}$ چھوٹا بہ نسبت $\frac{\text{ن}+1}{\text{ن}}$ کے ہوگا بشرطیکہ $1+\frac{\text{سہ}+\text{صہ}+1}{\text{ن}}+\frac{\text{سہ}+\text{صہ}}{\text{ن}^2}$ چھوٹا

$(1+\frac{1}{\text{ن}})(1+\frac{\text{سہ}+\text{صہ}}{\text{ن}}+\frac{\text{سہ صہ}}{\text{ن}^2})$ سے ہو یعنی بشرطیکہ $\frac{\text{سہ صہ}}{\text{ن}^2}+\frac{\text{سہ صہ}}{\text{ن}^3}$ مثبت ہو

پس اگر سہ و صہ کی ایک ہی علامت ہو تو $\frac{\text{س}_\text{ن}}{\text{س}_{\text{ن}+1}}$ چھوٹا بہ نسبت $\frac{\text{ن}+1}{\text{ن}}$ کے ہوگا لیکن بموجب دفعہ ۵۶۲ کے سلسلہ جسکی نونی رقم $\frac{1}{\text{ن}}$ ہے انفراجی ہے اسی معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۷۱۵ کے سلسلہ جسکی نونی رقم سن ہے انفراجی ہے اگر سہ و صہ کی ایک علامت نہ ہو تو م ایک معین مثبت صحیح ایسا بڑا فرض کرو کہ م + سہ صہ مثبت ہو تو

$$\frac{\text{س}_{\text{ن}+\text{م}}}{\text{س}_{\text{ن}+\text{م}+1}}=\frac{(\text{ن}+\text{م}+1)(\text{ن}+\text{م}+\text{ل})}{(\text{ن}+\text{م}+\text{سہ})(\text{ن}+\text{م}+\text{صہ})}=\frac{(1+\frac{\text{م}+1}{\text{ن}})(1+\frac{\text{م}+\text{ل}}{\text{ن}})}{(1+\frac{\text{م}+\text{سہ}}{\text{ن}})(1+\frac{\text{م}+\text{صہ}}{\text{ن}})}$$

سیہ ضرب دینے معلوم ہوگا کہ $\frac{\text{ن}+1}{\text{ن}}$ سے چھوٹا ہے پس وہ سلسلہ جسکی ن وین رقم $\text{س}_{\text{ن}+\text{م}}$ ہے انفراجی اسواسطے سلسلہ مفروض بھی انفراجی ہے

سوم فرض کرو کہ ل - سہ - صہ منفی ہے

یہان $\frac{\text{س}_\text{ن}}{\text{س}_{\text{ن}+1}}$ ہمیشہ چھوٹا اوس سلسلہ کے $\frac{\text{س}'_\text{ن}}{\text{س}'_{\text{ن}+1}}$ سے جسکے اندر قیمتین سہ او صہ کی وہی ہیں اور ل - سہ - صہ صفر ہے یعنی $\frac{\text{س}_\text{ن}}{\text{س}_{\text{ن}+1}}$ ہمیشہ کم ہی اپنی متناظر کی نسبت سے اوس سلسلہ مین کہ جسکا انفراجی ہونا فرض دوم مین ثابت ہوچکا ہے اسواسطے بموجب دفعہ ۷۶۵ کے سلسلہ جسکے ن وین رقم سن ہے انفراجی ہے

(۱۵) اول فرض کرو کہ ا - ط - ۱ مثبت ہے

تو ایک مثبت مقدار صہ بڑی واحد سے ایسے دریافت ہوسکتی ہے کہ جب ن کما ینبغی بڑا ہو تو بڑا $\frac{\text{ن}+\text{صہ}}{\text{ن}}$ سے ہوگا اور یہہ یون حاصل ہوجائیگی کہ اگر $1+\frac{\text{ا}}{\text{ن}}+\frac{\text{ب}}{\text{ن}^2}+\frac{\text{ج}}{\text{ن}^3}+\dots$ بڑا $(1+\frac{\text{صہ}}{\text{ن}})(1+\frac{\text{ط}}{\text{ن}}+\frac{\text{ص}_1}{\text{ن}^2}+\frac{\text{ص}_2}{\text{ن}^3}+\dots)$ سے یعنی ا - ط - صہ بڑا $\frac{\text{ط صہ}+\text{ص}_1-\text{ب}}{\text{ن}}+\frac{\text{ص}_1\text{صہ}+\text{ص}_2-\text{ج}}{\text{ن}^2}+\dots$ سے ہو اور یہہ شرط ظاہرا یون پوری ہوجائیگی کہ ن کو کما ینبغی بڑا فرض کریں - تو موافق مثال گذشتہ کی فرض اول کے عمل کرنے سے یہہ معلوم ہوگا کہ سلسلہ جسکی ن وین رقم سن ہے انضمامی ہے

سلسلہ جسکی ن وین قسم مس ہی انفراجی ہے اسیواسطے بموجب دفعہ ۷۶۵ کے سلسلہ جسکی ن وین قسم $س_{ن+۱}$ ہے انفراجی ہے

ستاون وان باب

(۱) دفعہ ۷۹۵ مین ا = ۵ اور ب = ۱ اسکے رکھو تو ہم کو جملہ کی قیمت یہہ معلوم ہوگی کہ ۲۴ ہر

(۲) بموجب دفعات ۷۹۴ و ۷۹۵ کے جملہ = $\sqrt{(ن^۲+۱)^۲ - ۴(ن^۲-۱)^۲}$ یعنی $ن^۲+۱-(ن^۲-۱)$ اخیر۲

(۳) استقرا سے یہہ ثابت ہوسکتا ہے مان لو کہ $ع_ن = ب ق_{ن-۱}$ اور $ع_{ن-۱} = ب ق_{ن-۲}$ اسے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$ع_{ن+۱} = ا ع_ن + ب ع_{ن-۱} = ا ب ق_{ن-۱} + ب^۲ ق_{ن-۲} = ب(ا ق_{ن-۱} + ب ق_{ن-۲}) = ب ق_ن$$

پس جب نتیجہ ن کی کسی قیمت تک درست ہے تو اوسی مابعد کا نتیجہ بھی یعنی جب ن کی قیمت پر ایک زیادہ کرین درست ہے اور یہہ ثابت ہوسکتا ہے کہ نتیجہ صحیح ہے جب ن = ۱ تو وہ صحیح ہوگا جب ن = ۲ اسیواسطے وہ ہمیشہ صحیح ہے

(۴) یہان $لا^ن$ کا سر $\frac{ب}{۱-ا لا}\left(۱-\frac{ب لا^۲}{۱-ا لا}\right)^{-۱}$ کی صورت مفصلہ مین $ع_ن$ ہے یعنی $\frac{ب}{۱-ا لا} + \frac{ب^۲ لا^۲}{(۱-ا لا)^۲} + \frac{ب^۳ لا^۴}{(۱-ا لا)^۳} + \dots$ کے صورت مفصلہ مین اب ان مین ہر رقم کو بموجب مسئلہ جملہ ثنائیہ پہلا مین اور اونمین سے ہر ایک مین $لا^ن$ کے امثال چن لین اور $لا^ن$ کا سر $\frac{ا+ب}{۱-ا لا-ب لا^۲}$ کی صورت مفصلہ مین $ق_ن$ ہے یعنی $\frac{۱}{لا(۱-ا لا-ب لا^۲)} - \frac{۱}{لا}$ کی صورت مفصلہ مین پس $لا^{ن+۱}$ کا سر $\frac{۱}{لا(۱-ا لا-ب لا^۲)}$ کے صورت مفصلہ مین $ق_ن$ ہے یعنی $\frac{۱}{۱-لا} + \frac{ب لا^۲}{(۱-ا لا)^۲} + \frac{ب^۲ لا^۴}{(۱-ا لا)^۳} + \dots$ کی صورت مفصلہ مین ۔ اس باب پر خیال کرلینا چاہیے کہ یہی صورتین جو $ع_ن$ اور $ق_ن$ کے واسطے حاصل ہوئی ہین مثال سوم کے دعوی کا ثبوت بلاواسطہ ہے

(۵) یہہ استقرا سے ثابت ہوسکتا ہے ہم کو معلوم ہے کہ $ع_ن = ن(ع_{ن-۱} + ع_{ن-۲})$ اور $ق_ن = ن(ق_{ن-۱} + ق_{ن-۲})$ اسیواسطے $ع_ن + ق_ن = ن(ع_{ن-۱} + ق_{ن-۱} + ع_{ن-۲} + ق_{ن-۲})$

توع اول کی ایک کسر مسلسل غیر متناہی $\frac{1}{لا}$ لوک (۱ + لا) کے واسطے حاصل ہوگی جسکے ہر حلقہ کا لسنب ۱ ہوگا اور اول حلقہ کے شمار کنندہ کا ۱ ہے اور دوسرے کا $\frac{1}{۲}$ لا اور علے العموم ۲ ر وان $\frac{ر^۲ لا}{۲(۲ ر - ۱)}$ اور (۲ ر + ۱) وان $\frac{ر^۲ لا}{۲(۲ ر + ۱)}$ ہی

اٹھاونوان باب

(۱) اول اور دوم مساوات سی تفریق کرنے سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ لا - ی = ب ی - ا لا اسیواسطے لا (۱ + ا) = ی (۱ + ب) اور اسی طرح دوم اور سوم مساوات سی یہہ حاصل ہوتا ہی کہ ی (۱ + ب) = ی (۱ + ج) اور سوم اور چہارم مساوات سی ی (۱ + ج) = ص (۱ + د) ی (۱ + ا) = ی (۱ + ب) = ی (۱ + ج) = ص (۱ + د) = ک کے فرض کرو اول مساوات مین ان کو مندرج کرنے سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$\frac{ا}{۱ + ا} = \frac{ب}{۱ + ب} + \frac{ج}{۱ + ج} + \frac{د}{۱ + د}$ اور $\frac{۱}{۱ + ا} = ۱ - \frac{ا}{۱ + ا}$ پس اسسے نتیجہ مطلوب حاصل ہے

(۲) $\frac{لا}{ا} = ی + ی$ اور $\frac{ی}{ب} = ی +$ لا اور $\frac{ی}{ج} =$ لا + ی دوسرے مساوات کو اول مساوات مین سے تفریق کرو تو $\frac{لا}{ا} - \frac{ی}{ب} =$ ی - لا اسیواسطے $\frac{لا(۱ + ا)}{ا} = \frac{ی(۱ + ب)}{ب}$ اسی طرح تیسرے مساوات کو دوسرے مساوات سے تفریق کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ $\frac{ی(۱ + ب)}{ب} = \frac{ی(۱ + ج)}{ج}$ پس $\frac{لا(۱ + ا)}{ا} = \frac{ی(۱ + ب)}{ب} = \frac{ی(۱ + ج)}{ج} =$ ک کے فرض کرو اول مساوات مین ان کو درج کرو تو $\frac{ا}{۱ + ا} = \frac{ب}{۱ + ب} + \frac{ج}{۱ + ج}$ کسور کو دور کرو اور اختصار کرو تو ا ب + ب ج + ج ا + ۲ ا ب ج = ۱

پھر $\frac{لا}{ا(۱ - ب ج)} = \frac{ک ۲ ا}{(۱ + ا)^۲ (۱ - ب ج)} = \frac{ک ۲ ا}{۱ + ۲ ا + ا^۲ - ب ج - ۲ ا ب ج - ا^۲ ب ج}$

لیکن ۱ - ب ج - ۲ ا ب ج = ا ب + ج ا پس $\frac{لا}{ا(۱ - ب ج)}$ کی تحویل $\frac{ک ۲ ا}{ا ۲ + ا^۲ + ا ب + ج ا - ا^۲ ب ج}$ کی طرف ہوتی ہی یعنی $\frac{ک ۲}{۲ + ا + ب + ج - ا ب ج}$ اور اسی طرح

یعنی ا۲ ب۲ ج۲ [ا۲ + ب۲ + ج۲ + ۲ ا ب ج] = ا۳ ب۳ ج۳

(۶) (ا۲ − لا۲ + ب۲ − ی۲) / (ا۲ − لا۲ − ب۲ + ی۲) = ۵ (ی + لا) / (ی − لا) دفعہ ۳۹۶ دیکھو اسیواسطے

ا۲ + ب۲ − لا۲ − ی۲ = ۵ (ی + لا)/(ی − لا) [(لا − ی)۲ − لا۲ + ی۲] = ۱۵ لا ی (لا + ی)

اسیواسطے ا۲ + ب۲ = لا۲ + ی۲ + ۱۵ لا ی (لا + ی) اور نیز ا۲ − ب۲ = (لا − ی)۳

اسیواسطے جمع کرنے سے ا۲ = لا۳ + ۶ لا۲ ی + ۹ لا ی۲ = لا (لا + ۳ ی)۲ اور اسیطرح تفریق کرنے سے

ب۲ = ی (ی + ۳ لا)۲ اسی معلوم ہوا کہ ا^(۲/۳) + ب^(۲/۳) = لا^(۱/۳) (لا + ۳ ی) + ی^(۱/۳) (ی + ۳ لا) = (لا^(۱/۳) + ی^(۱/۳))۳

پس (لا^(۱/۳) + ی^(۱/۳))۳ = ی^(۲/۳)

(۷) ا۵ − ج = (لا + ی)۵ − لا۵ − ی۵ = ۵ لا ی (لا۳ + ی۳) + ۱۰ لا۲ ی۲ (لا + ی)

اور نیز ا۳ − ب۳ = (لا + ی)۳ − لا۳ − ی۳ = ۳ لا ی (لا + ی) = ۳ لا ی ا

پس ا۵ − ج۵ = (ا۳ − ب۳)/۳ ا × ۵ ب۳ + ۱۰ ((ا۳ − ب۳)/۳ ا)۲ ا = (ا۳ − ب۳)/۹ ا (۱۰ ا۳ + ۵ ب۳)

اسیواسطے ۹ ا (ا۵ − ج۵) = ۵ (ا۳ − ب۳) (۲ ا۳ + ب۳)

(۸) جمع اور تفریق کرنے سے

۳۲ (ا/ج + ج/ا) = (ا/لا + لا/ا)۵ اور ۳۲ (ا/ج − ج/ا) = (ا/لا − لا/ا)۵

اسیواسطے ۲ ((ج۲ + ا۲)/ا ج)^(۱/۵) = لا/ا + ا/لا اور ۲ ((ج۲ − ا۲)/ا ج)^(۱/۵) = ا/لا − لا/ا

اور مجذور کرنے اور تفریق کرنے سے ۴ ((ج۲ + ا۲)/ا ج)^(۲/۵) − ۴ ((ج۲ − ا۲)/ا ج)^(۲/۵) = ۴

(۹) ہم کو یہہ دریافت ہوگا کہ س ص = لا/ی + ی/لا + ی/ز + ز/ی + ز/لا + لا/ز + ۳

اور یہہ برابر ل + ۱ کے ہے

(۱۰) اول دو مساواتون سے یہہ دریافت ہوتا ہے کہ لا = − (ا − ب)/ا اور ی = (ا − ب)/ب

اسکو تیسری مساوات مین مندرج کرو

(۱۱) اول مساوات کو ی مین ضرب دو اور دوسری کو لا مین اور جمع کرو تو

ا (لا۲ + ی۲) = ی۳ + ۳ لا۲ ی یعنی س = ی۳ + ۳ لا۲ ی اور اسیطرح ص = لا۳ + ۳ لا ی۲

اسیواسطے سہ + صہ = (لا + ی)^۳ اور (سہ + صہ)^{۲/۳} = (لا + ی)^۲ اور اسیطرح
(سہ − صہ)^{۲/۳} = (لا − ی)^۲ جمع کرو تو (سہ + صہ)^{۲/۳} + (سہ − صہ)^{۲/۳} = ۲ (لا^۲ + ی^۲) = ۲

(۱۲) تینون مساواتون کو باہم ضرب دو اور جذر نکالو تو
(لا + ی) (ی + ی) (ی + لا) = ±۸ ا ب ح لا ی ی اسیواسطے (لا + ی) (ی + ی) (ی + لا) / لا ی ی = ±۸ ا ب ح
یعنی لا/ی + ی/لا + ی/ی + ی/ی + ی/لا + لا/ی + ۲ = ±۸ ا ب ح اسیواسطے
۴ ح^۲ − ۲ + ۴ ا^۲ − ۲ + ۴ ب^۲ − ۲ + ۲ = ±۸ ا ب ح سے ۴ پر تقسیم کرو

(۱۳) ہریک کسر معلوم کو برابر ک کے فرض کرو تو
لا = ک (ا^۲ + لا^۲) اور ۲ ی = ک (ا^۲ + ی^۲) اور ۴ ی = ک (ا^۲ + ی^۲)
ان مساواتون مین سے اول مساوات کو ی^۲ − ی^۲ مین ضرب دو اور دوسرے کو ی^۲ − لا^۲ مین اور تیسرے کو لا^۲ − ی^۲ مین اور جمع کرو تو بائین طرف کا مجموعہ فنا ہو جایگا.
پس لا (ی^۲ − ی^۲) + ۲ ی (ی^۲ − لا^۲) + ۴ ی (لا^۲ − ی^۲) = ۰

(۱۴) جمع اور تفریق کرنے سے اور ۲ پر تقسیم کرنے سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ ۳ لا^۲ + ی^۲ = ا لا
اور ۳ ی^۲ + لا^۲ = ب ی اول مساوات کو اور دوسرے کو لا مین ضرب دین تو جمع اور تفریق کرنے سے
(لا + ی)^۳ = (ا + ب) لا ی اور (لا − ی)^۳ = (ب − ا) لا ی اسیواسطے
(لا + ی)^۲ = [(ا + ب) ح^۲]^{۲/۳} اور (لا − ی)^۲ = [(ا − ب) ح^۲]^{۲/۳} تفریق کرو تو
۴ ح^۲ = ح^{۴/۳} [(ا + ب)^{۲/۳} − (ا − ب)^{۲/۳}]

(۱۵) لا = ا/لا اور ی = ب/ی اور ی = ح/ی ان کے مندرج کرنے سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ
۲ ا = ح ی/ی + ب ی/ی اور ۲ ب = ا ی/لا + ح لا/ی اور ۲ ح = ب لا/ی + ا ی/لا
مجذور کرو اور ہریک کو ا و ب و ح مین ضرب دو اور جمع کرو تو
۴ (ا ا^۲ + ب ب^۲ + ح ح^۲) = [illegible] + ۴ ا ب ح
اور ضرب دینے سے

۸ اَ بَ حَ = (ب حَ بَ حَ)/(یٰ) + (ا بَ یٰ)/(زٰ) + (بَ لاَ ا)/(لا) + (بَ حَ لاَ)/(یٰ) + (حَ بَ لاَ)/(زٰ) + (بَ زٰ)/(لا) + ۱۱ ب ح

اسیواسطے ۴ (و وَ + ب بَ + ح حَ) - ۶ ا س ح = ۸ اَ بَ حَ - ۲ ا ب ح

اسیواسطے و وَ + ب بَ + ح حَ = ا س ح + ۲ اَ بَ حَ

(۱۶) اب ۱۱ حروف ہین جنمین ۱۱ ور ک اور ن دو دفعہ آتے ہین پس • جدا جدا حروف سے ۸×۷×۶ ترتیبین حاصل ہوتی ہین یعنی ۳۳۶ ترتیبین اسیواسطے ۷×۶ وہ ترتیبین ہین جنمین ا دو دفعہ واقع ہوتا ہی اسواسطے کہ اور سات حرفون مین سے ہر ایک حرف اول اور دوم اور سوم مقام پر تینون جگہ واقع ہو سکتا ہی اور علی ہذا القیاس ۷×۳ وہ ترتیبین ہین جنمین ک دوبارہ واقع ہو اور اتنے وہ ترتیبین ہین جنمین ن دوبارہ واقع ہو پس کل تعداد ترتیبون کی علیحدہ

= ۳۳۶ + ۶۳ = ۳۶۹

(۱۸) صفائی کے واسطے فرض کرو کہ م - ۱ روشین باغ کی طول کے متوازی ہین اور ن - ۱ روشین باغ کی عرض کے متوازی ہین پس اوس شخص کو ن زوج کیاریان باغ کے طول کی سمت مین اور م زوج کیاریان عرض کی سمت مین طے کرنے پڑینگے اب (م + ن) حصے اوسکی رستی مین ہوئی اور یہہ کسی ترتیب سے واقع ہو سکتی ہین پس اونکی ترتیبون کے تعداد برابر اون ترتیبون کے تعداد کے ہوئی جو م + ن اشیا مین سے جسمین م ایک قسم کے اشیا اور ن ایک قسم کی اشیا مین کل کے ترتیبین ہین

(۲۱) عٰ = (لاَ + زَ - ۲ لا ز) (زَ + یَ - ۲ ز ی) (یَ + لاَ - ۲ ی لا)

قٰ = (لاَ + زَ + ۲ لا ز) (زَ + یَ + ۲ ز ی) (یَ + لاَ + ۲ ی لا)

اسے معلوم ہوا کہ عٰ + قٰ - ۲ رٰ =

۸ لا ز ی [لا (زٰ + یٰ) + ز (یٰ + لاٰ) + ی (لاٰ + زٰ)] = ۸ لا ز ی (قٰ - ۲ لا ز ی)

پس ۱۶ لاٰ زٰ یٰ - ۸ قٰ لا ز ی + عٰ + قٰ - ۲ رٰ = ۰

اسی طرح ہم کو یہہ دریافت ہو سکتا ہے

$= -(ا - ب + ۲ ب) \left[\frac{ب - ا}{ب} + \frac{1}{۲}\left(\frac{ب - ا}{ب}\right)^۲ + \dots + \frac{1}{ن}\left(\frac{ب - ا}{ب}\right)^ن + \dots \right]$

پس لوکارثم کو اس صورت میں لکھہ سکتے ہیں

$-۲(ب - ا) - \left(\frac{1}{۲} - \frac{۲}{۳}\right)\frac{(ب-ا)^۲}{ب} \dots - \left(\frac{۲}{ن} - \frac{1}{ن-1}\right)\frac{(ب-ا)^ن}{ب^{ن-1}} - \dots$

(۲۵) پہلی مثال میں فرض کرو کہ ایک ہی مقدار ا اور ب پر زیادہ کی گئی ہے تو لوکارثم باعتبار تعداد کے کم ہو گی اور چونکہ لوکارثم منفی ہے تو کسر $\left(\frac{ا}{ب}\right)^{ا+ب}$ زیادہ ہو گی

سوالات متفرقہ

(۱) $لا - [۲ ی + \{۳ ی - ۳ لا - (لا + ی)\}] + ۲ لا - (ی + ۳ ی)$

$= لا - [۲ ی + \{۳ ی - ۳ لا - لا - ی\}] + ۲ لا - ی - ۳ ی$

$= لا - [۲ ی + ۳ ی - ۴ لا - ی] + ۲ لا - ی - ۳ ی$

$= لا - ۲ ی - ۳ ی + ۴ لا + ی + ۲ لا - ی - ۳ ی = ۷ لا - ۲ ی - ۶ ی$

(۲) $ا لا^۲ - ب لا + ح)\ ا^۲ لا^۴ + (۲ ا ح - ب^۲) لا^۲ + ح^۲ (ا لا^۲ + ب لا + ح$

$ا^۲ لا^۴ - ا ب لا^۳ + ا ح لا^۲$

$ا ب لا^۳ + (ا ح - ب^۲) لا^۲ + ح^۲$

$ا ب لا^۳ - ب^۲ لا^۲ + ب ح لا$

$ا ح لا^۲ - ب ح لا + ح^۲$

$ا ح لا^۲ - ب ح لا + ح^۲$

(۳) شمار کنندہ کو ۷ میں ضرب دو

$۷ لا^۲ - ۳ لا - ۲۱ لا + ۱۲)\ ۳۵ لا^۴ + ۱۴ لا^۳ - ۱۰۵ لا - ۴۲ (۵$

$۳۵ لا^۴ - ۲۰ لا^۳ - ۱۰۵ لا + ۶۰$

$۳۴ لا^۳ - ۱۰۲$

۳۴ پر تقسیم کرو تو $لا^۳ - ۳)\ ۷ لا^۴ - ۴ لا^۳ - ۲۱ لا + ۱۲ (۷ لا - ۴$

$۷ لا^۴ - ۲۱ لا$

$-۴ لا^۳ + ۱۲$

$-۴ لا^۳ + ۱۲$

پس لا² − ۳ مقسوم علیہ اعظم ہے

(۴) (۳لا − ا)/(۵لا² + ۳ا) + (لا + ۳ا)/(۷لا² + ۹ا لا) = [(۳لا − ا)(۷لا + ۹ا) + (لا + ۳ا)(۵لا + ۳ا)] / [(۷لا + ۹ا)(۵لا + ۳ا)] =

(لا + ۲ا)/(ا² − لا²) − (لا − ا)/(۲ا² + ۳ا لا + لا²) = [۲(لا − ا) − ۲(لا + ۲ا)] / [(ا² − لا²)(لا + ۲ا)] = وغیرہ

(۵) ۱۵ میں ضرب دو تو ۴لا + ۱ − ۵(۵لا − ۱) = ۱۵(لا − ۲) وغیرہ

(۶) دوسری مساوات کو ۲ میں ضرب دو اور اول پر زیادہ کرو

(۷) فرض کرو کہ زید کو بکر لا گھنٹے میں پکڑیگا تو بکر (لا × ۹/۲) میل اور زید (لا + ۲ ۱/۲) × ۳۱/۴ میل چلا

اسواسطے ۹لا/۲ = ۳۱/۴ (لا + ۲ ۱/۲)

(۸) فرض کرو کہ گنی کی تعداد لا ہے تو لا + ۴۸ تاف کرون کی تعداد ہوگی اسواسطے

(۲لا + ۵/۴ (لا + ۴۸) = ۲۰۰۰

(۹) ا⁴ + ۲ا³ ... − ا + ۱/۴ ا² + ا − ۱/۲

ا⁴

۲ا³ (ا + ۲ا²

۲ا³ + ا²

۲ا² + ۲ا + ۱/۴) − ا² − ا + ۱/۴

− ا² − ا + ۱/۴

(۱۰) (۳ − لا)(۳لا − ۱) = ۵لا²/۲ اور ۳لا² − ۵/۲ ۱لا + ۳ = ۰

(۱۱) − [۲ا − ۳ب − [۴ا − ۵ب − ۶ج − (۷ا − ۸ب − ۹ج − ۱۰د)]]

= ا − [۲ا − ۳ب − [۴ا − ۵ب − ۶ج − ۷ا + ۸ب + ۹ج + ۱۰د]]

= ا − [۲ا − ۳ب − [− ۳ا + ۳ب + ۳ج + ۱۰د]]

= ا − [۵ا − ۶ب − ۳ج − ۱۰د] = ا − ۵ا + ۶ب + ۳ج + ۱۰د = − ۴ا + ۶ب + ۳ج + ۱۰د

= ۰ + ۵ + ۲ + ۹ + ۲ = ۱۰

(۱۳) لا۲ + ۵ لا + ۶) لا۲ + ۹ لا + ۸ (لا
لا۲ + ۵ لا + ۶
لا + ۲) لا۲ + ۵ لا + ۶ (لا + ۳
لا۲ + ۲ لا
۳ لا + ۶
۳ لا + ۶

لا + ۲ مقسوم علیہ اعظم ہے

(۱۴) ۱۲ لا۲ + ۳۱ لا ی + ۲۰ ی۲ = (۳ لا + ۴ ی) (۴ لا + ۵ ی) پس (۳ لا + ۴ ی) (۴ لا + ۵ ی) نسب نما مشترک ہے

(۱۵) (لا − ۲) (لا − ۳) + ۲ (لا − ۱) (لا − ۳) = ۳ (لا − ۱) (لا − ۲) وغیرہ

(۱۶) مساواتوں کو جمع کرو اور ۱۶ پر تقسیم کرو تو لا − ی = ۵ اور مساواتوں کو تفریق کرو اور ۲ پر تقسیم کرو تو لا + ی = ۷ پس جمع و تفریق کرنے سے مطلب حاصل ہے

(۱۷) ۹ بجے کے بعد فرض کرو لا منٹ گذری تہی تو لا منٹ میں گھنٹہ کی بڑی سوئی چلنے پر لا حصے طے کریگی اور لمبی سوئی چھوٹی سوئی سے ۱۲ گنی چلتی ہے تو چھوٹی سوئی لا/۱۲ حصے لا منٹ میں طے کریگی اور ۹ بجے چھوٹی سوئی ۴۵ حصے آگے لمبی سوئی سے ہے اسلیئے لا = لا/۱۲ + ۴۵ اسواسطے ۱۱ لا = ۵۴۰ + لا = ۴۹ ۱/۱۱

(۱۸) فرض کرو کہ موہن اکیلا کام کو لا دن میں اور سوہن ی دن میں تیار کر لیتا ہے تو موہن کام کے ۳۰/لا حصے ۳۰ دن میں بنائیگا
اسیواسطے ۳۰/لا = ۳/۵ اور اسی طرح ۱/لا + ۱/ی = ۲/۵

(۱۹) ۴ لا۲ − لا (۱۲ ی − ۴ ی) + ۹ ی۲ − ۶ ی ی + ی۲ (۲ لا − (۳ ی − ی)
۴ لا۲

۴ لا − (۳ ی − ی) | − لا (۱۲ ی − ۴ ی) + ۹ ی۲ − ۶ ی ی + ی۲
− لا (۱۲ ی − ۴ ی) + ۹ ی۲ − ۶ ی ی + ی۲

(۲۰) ۳ (لا − ۳) − (لا − ۱) (لا − ۴) = (لا − ۱) (لا − ۳) عمل آگے آسان ہے

(۳۰) ۱۱لا² - ۹لا = ۲۵/۴

(۳۱) (۴×۳×۲×۱)/(۴×۱-۳×۲) = (۱۲+۲)/(۴-۶) = ۱۴/۲ = ۷ اور ۳√ - ۳√ = ۹ - ۸ = ۱

۳√(۱۶+۹+۲) = ۳√۲۷ = ۳

(۳۲) (۳/۱۰ + لا²)(۲/۱۰ - لا) = ۶/۱۰۰ - ۳لا/۱۰ + ۲لا²/۱۰ - لا³

(۳۳) لا⁴ - ۱۱۵لا + ۲۴) ۲۴لا⁴ - ۱۱۵لا³ (۲۴ + ۱

۲۴لا⁴ - ۶۷۰لا³ + ۵۷۶ ...

-۱۱۵لا³ + ۶۷۰لا² - ۵۷۵

-۱۱۵ پر تقسیم کرو لا³ - ۲۴لا + ۵) لا⁴ - ۱۱۵لا + ۲۴ (لا

لا³ - ۲۴لا² + ۵لا

۲۴لا² - ۱۲۰لا + ۲۴

۲۴ پر تقسیم کرو لا² - ۵لا + ۱) لا³ - ۲۴لا² + ۵لا (لا - ۵

لا³ - ۵لا² + لا

-۵لا² + ۲۵لا - ۵

-۵لا² + ۲۵لا - ۵

پس لا² - ۵لا + ۱ مقسوم علیہ اعظم ہوا

(۳۴) ((لا+۱)(لا+۱) + (لا-۱)(لا-۱) + (لا-۱)(لا+۱) + لا²)/(لا² - ۱) = ۳(لا²+۱)/(لا²-۱)

(۳۵) لا³ - ۹لا² + ۲۷لا - ۲۷ - ۳(لا³ - ۶لا² + ۱۲لا - ۸) + ۳(لا³ - ۳لا² + ۳لا - ۱) - لا³ = ۹ - لا

یعنے ۶ - ۹ = لا

(۳۶) اول مساوات کو ۵ مین اور دوسرے کو ۳ مین ضرب دوا اور تفریق کرو تو ر = ۶

(۳۷) فرضکرو کہ ہر قسم کی بھیڑین اوسنے خریدین تو ۳لا + ۴لا یعنی ۷لا روپیا اوسنی بھیڑون کے خریدنے مین صرف کیا اور ۷لا/۲ روپیا اوسکا نصف روپیہ ہی تو ۷لا/۶ بھیڑین تین روپیہ والے اور ۷لا/۸ بھیڑین ۴ روپیہ والی مول لیتا تو ۷لا/۶ + ۷لا/۸ = ۲لا + ۲

(۳۸) ۲۰ عورتون نے ۶۰ روپیہ پائی تو ہر ایک عورت نے ۳ روپیہ پائے اب فرض کرو کہ ایک مرد نے لا روپیہ پ

اور اسکی تحویل اور اختصار سے یہہ ہوتا ہے کہ ـ ۸۴ لا + ۱۲ = ـ ۱۴۴ لا + ۳۶

(۴۶) دوسری مساوات کو ۵ میں ضرب دو اور اول پر جمع کرو تو ۵۸ لا ـ ۲۹ ی ـ ۲۹ = ۰

۲۹ پر تقسیم کرو تو ۲ لا ـ ی ـ ۱ = ۰ پہر دوسرے مساوات کو ۳ میں ضرب دو اور تیسرے پر جمع کرو

(۴۷) فرضکرو کہ بوتلوں کی تعداد لا ٹھہری تو لا کا گلاب ۱۲ (لا + ۸۰) آنوں کو فروخت ہوا اسواسطے ۱۲ (لا + ۸۰) = ۱۵ لا × ۸۰ (۱ + ۱/۱۰۰)

(۴۸) فرضکرو کہ موہن کام کو لا دنوں اور سوہن ی دنوں میں اور رادھا ح دنوں میں علیحدہ علیحدہ

تو ۱/لا + ۱/ی = ۱/۱۲ اور ۱/لا + ۱/ح = ۱/۱۵ اور ۱/ی + ۱/ح = ۱/۲۰ جمع کرنے سے

۲ (۱/لا + ۱/ی + ۱/ح) = ۱/۵ اسواسطے ۱/لا + ۱/ی + ۱/ح = ۱/۱۰ پس موہن اور سوہن اور رادھا

تینوں مل کر کام کا ۱/۱۰ حصہ بناتے ہیں اسواسطے کل کام ۱۰ دن میں بناوینگے

(۴۹) فرضکرو کہ √لا + √ی جذر ہیں تو بموجب دفعہ ۱۰۳ کے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

لا + ی = ا ـ ح اور √لای = √(اب + ب ح ـ ا ح ـ ب²)

اسواسطے (لا ـ ی)² = (ا ـ ح)² ـ ۴ (اب + ب ح ـ ا ح ـ ب²) = (۲ب ـ ا ـ ح)²

(۵۰) ۴ ـ ۳/(۴ ـ لا) = (۱۶ ـ ۴لا ـ ۳)/(۴ ـ لا) = (۱۳ ـ ۴لا)/(۴ ـ لا) اور ۳ ÷ (۱۳ ـ ۴لا)/(۴ ـ لا) = (۱۲ ـ ۳لا)/(۱۳ ـ ۴لا)

۴ ـ (۱۲ ـ ۳لا)/(۱۳ ـ ۴لا) = (۵۲ ـ ۱۶لا ـ ۱۲ + ۳لا)/(۱۳ ـ ۴لا) = (۴۰ ـ ۱۳لا)/(۱۳ ـ ۴لا)

۳ ÷ (۴۰ ـ ۱۳لا)/(۱۳ ـ ۴لا) = (۳۹ ـ ۱۲لا)/(۴۰ ـ ۱۳لا) پس لا = (۳۹ ـ ۱۲لا)/(۴۰ ـ ۱۳لا)

اسواسطے ۱۳لا² ـ ۵۲لا + ۳۹ = ۰ اسواسطے لا² ـ ۴لا + ۳ = ۰

(۵۱) جملہ جب حل کیا جائیگا تو لا کا کسر ا + ب + ح + ب ـ ح ـ (ب + ح ـ ا) + ح + ا ـ ب

یعنی ۲ا اسی طرح ی کا کسر اور ی کا دریافت کرو

(۵۲) (ص ـ ا + ص ـ ب)³ = (ص ـ ا)³ + (ص ـ ب)³ + ۳ (ص ـ ا) (ص ـ ب) (ص ـ ا + ص ـ ب)

اور ص ـ ا + ص ـ ب = ۲ص ـ ا ـ ب = ح

(لا − ۵) (لا − ۴) (− لا² + ۱۲ لا − ۲۴) = (لا − ۶) (لا − ۳) (− لا² + ۱۲ لا − ۲۶)

یعنی (لا² − ۹ لا + ۲۰) (− لا² + ۱۲ لا − ۲۴) = (لا² − ۹ لا + ۱۸) (− لا² + ۱۲ لا − ۲۶)

اسیواسطے (لا² − ۹ لا) (− لا² + ۱۲ لا) + ۲۰ (− لا² + ۱۲ لا) − ۲۴ (لا² − ۹ لا) − ۲۰ × ۲۴

= (لا² − ۹ لا) (− لا² + ۱۲ لا) + ۱۸ (− لا² + ۱۲ لا) − ۲۶ (لا² − ۹ لا) − ۱۸ × ۲۶

اسیواسطے ۲ (− لا² + ۱۲ لا) + ۲ (لا² − ۹ لا) = ۲۴ × ۲۰ − ۲۶ × ۱۸

(۶۶) کسور کو دور کرو اور سادہ کرو تو مساواتون کی صورت یہہ ہوجائیگی

ب لا − ا ی = ۱۰ اور ۲ ب لا − ا ی = ا ب

(۶۷) فرض کرو کہ مکان لا روپیہ کو خریدا تھا تو کل لا + لا/۲۵ یعنی ۲۶ لا/۲۵ روپیہ اوسکا صرف ہوا اور مکان کے خالی رہنی سی جو نقصان سمجھا گیا ۲۶ لا/۲۵ × ۵/۱۰۰ روپیہ تھا پس ۱۱۹۲ − ۲۶ لا/۲۵ − ۲۶ لا/۲۵ × ۵/۱۰۰ نفع ہے اور اسیواسطے یہہ برابر ہے لا/۲۵ کے

(۶۸) فرض کرو کہ اول دفعہ مین لا رای موافق اور ی مخالف تھین تو

لا − ی = ی/۳ اور لا − ۱۰ − (ی + ۱۰) = ۱

(۶۹) منتقل کرو اور مجذور کرو لا − ۲ √(لا ا + ا) = لا + ا − ب − ۲ √(ب (لا + ا − ب)) + اب

اسیواسطے √(لا ا) = √(ب (لا + ا − ب)) مجذور کرو لا ا = ب (لا + ا − ب)

اسیواسطے لا (ا − ب) = ب (ا − ب)

(۷۰) یہہ مساوات معمولی قاعدہ سے حل ہو سکتی ہے یا اسکو اسطرح لکھین کہ

(لا − ۲) (لا − ۳) = (۲ + ۱/۲۲) (۱ + ۱/۲۲) اب یہہ ظاہر ہے کہ ایک حل لا − ۲ = ۲ + ۱/۲۲ ہے یعنی لا = ۴ ۱/۲۲ اور چونکہ قیمتوں کا مجموعہ ۵ ہے تو دوسری قیمت ۲۱/۲۲ ہو گی دفعہ ۳۳۶ دیکھو

(۷۱) ∛[۴(۳ − ۶ + ۲)] + ∛[(۲۴ − ۲۵)(۵ + ۳)] + ∛[(۳ − ۵)(۲ − ۶)]

= ∛۵ + ∛۸ + ∛۸ = ۵ + ۲ + ۲ = ۹

(۷۲) ہر یک جملہ = لا(لا۲ + ی۲) + ی(ی۲ + لا۲) + ی(لا۲ + ی۲) + ۲ لا ی

(۷۳) اول جملہ کو ۳ مین ضرب دو

۳ لا۳ - ۱۵ لا۲ - ۳۸ لا + ۶۵) ۲۰ لا۳ - ۶۷ لا۲ + ۲۲۰ لا - ۱۷۰۰ (۵

۲۰ لا۳ - ۷۵ لا۲ - ۱۹۰ لا + ۳۲۵

۲۰۲۵ - لا ۴۱۰ + لا۲ -

یعنے مقسوم علیہ کی علامت بدلو لا۲ - ۴۱۰ لا + ۲۰۲۵) ۴ لا۳ - ۱۵ لا۲ - ۳۸ لا + ۶۵ (لا

۴ لا۳ - ۱۶۴۰ لا۲ + ۸۱۰۰ لا

۱۶۲۵ لا۲ - ۸۱۳۸ لا + ۶۵

۱۳ پر تقسیم کرو اور قیمت کو جاری رکھو

۱۲۵ لا۲ - ۶۲۶ لا + ۵

۱۲۵ لا۲ - ۵۱۲۵۰ لا + ۲۵۳۱۲۵

۵۰۶۲۴ لا + ۲۵۳۱۲۵

۵۰۶۲۴ پر تقسیم کرو لا - ۵) لا۲ - ۴۱۰ لا + ۲۰۲۵ (لا - ۴۰۵

لا۲ - ۵ لا

- ۴۰۵ لا + ۲۰۲۵

- ۴۰۵ لا + ۲۰۲۵

پس لا - ۵ مقسوم علیہ اعظم ہے

(۷۴) نسب نما متحد (ا - ب) (ب - ح) (ح - ا) بناؤ تو شمار کنندہ

(ح - ب) ب ح (لا - ا)۲ + (ا - ح) ح ا (لا - ب)۲ + (ب - ا) ا ب (لا - ح)۲

یعنی لا۲ [(ح - ب) ب ح + (ا - ح) ح ا + (ب - ا) ا ب] یعنے لا۲ (ا - ب) (ب - ح) (ح - ا)

(۷۵) محدود کرو کہ (لا - ا)۲ + ۲ ا ب + ب۲ = (لا - ا)۲ + ۲ ب (لا - ا) + ب۲

اسواسطے دو ا ب = ۲ ب (لا - ا) اسیواسطے لا = ۲ ا

(۷۶) ا لا + ح ى + ب ی = ھ اور ح لا + ب ى + ا ی = ھ اور ب لا + ا ى + ح ی = ھ

اسمین ھ بجای $ا^3 + ب^3 + ح^3$ - ۳ ا ب ح کے ہی دوم مساوات کو اول سے تفریق کرو اور سوم مساوات کو دوم مساوات مین سے تو

(ا - ح) لا + (ح - ب) ى + (ب - ا) ی = ۰ اور (ح - ب) لا + (ب - ا) ى + (ا - ح) ی = ۰

اسے معلوم ہوا کہ

لا / ((ح - ب)(ا - ح) - (ب - ا)²) = ى / ((ب - ا)(ح - ب) - (ا - ح)²) = ی / ((ا - ح)(ب - ا) - (ح - ب)²)

دفعہ ۳۸۵ دیکھو ان تینوں نسب نمایوں مین سے ہر ایک کی تحویل ا ب + ب ح + ح ا - $ا^2$ - $ب^2$ - $ح^2$ کے طرف ہوتی ہے پس لا = ى = ی پس ہمکو ایک مساوات مین مندرج کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

(ا + ب + ح) لا = $ا^3 + ب^3 + ح^3$ - ۳ ا ب ح تقسیم ا + ب + ح پر کرو تو

لا = $ا^2 + ب^2 + ح^2$ - ب ح - ح ا - ا ب

(۷۷) چکر کا دور ۱ میل کا فرض کرو تو زید ۳۱ میل نصف گھنٹہ مین چلا یعنی ۱۶ میل فی گھنٹہ کی چال سے چلا اور اسی طرح بکر ۱۹ میل فی گھنٹہ کی چال سے چلا اور نصف گھنٹے کے اخر مین زید ½ میل اگے بکر سے تہا فرض کرو کہ بکر زید کو لا گھنٹون میں پکڑتی تو ۱۹ × لا = ½ + ۱۶ × لا

پس ۳ لا = ½ اسواسطے لا = ⅙

(۷۸) فرض کرو کہ پیر کے دن مچھلیون کی قیمت لا پنس ہے اور ر پنس دوسرے دن تو ۲۴/(۱۲ لا) تعداد اون درختون کی ہے جو ایک سورن کو پیر کے دن خریدی جائین اور ۱۲/ر اون مچھلیون کی تعداد ہے جو دوسرے دن ایک شلنگ کو خریدی جائین اسواسطے ۱۲/ر = ۲ × ۲۴/(۱۲ لا) اور ۱۰ لا + ۱۰ ر = ۲۶

(۷۹) ہم کو معلوم ہے کہ (ع + ق)³ = ع³ + ق³ + ۳ ع ق (ع + ق) پس یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

لا³ = ا + √(ا² + ب³) + ا - √(ا² + ب³) + ۳ لا ∛((ا + √(ا² + ب³))(ا - √(ا² + ب³)))

$\frac{4\text{لا}}{1-\text{لا}^2} - \frac{4\text{لا}}{1+\text{لا}^2} = \frac{8\text{لا}^3}{1-\text{لا}^4}$ اور $\frac{8\text{لا}^3}{1-\text{لا}^4} - \frac{8\text{لا}^3}{1+\text{لا}^4} = \frac{16\text{لا}^7}{1-\text{لا}^8}$

(۸۵) کسر دور کرو یا اسطرح عمل کرو کہ

$2\text{لا} + \frac{2\text{لا}+1}{2\text{لا}^2+2\text{لا}+3} = 2\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}+1}$ اسیواسطے $\frac{2\text{لا}+1}{2\text{لا}^2+2\text{لا}+3} = \frac{1}{\text{لا}+1}$

اسیواسطے $(\text{لا}+1)(2\text{لا}+1) = 2\text{لا}^2+2\text{لا}+3$

(۸۶) اول مساوات کو ب ح + ح ا + ا ب مین اور دوسرے مساوات کو ا + ب + ح مین ضرب دو اور تفریق کرو تو $(\text{ا}^2-\text{ب ح})\,\text{لا} + (\text{ب}^2-\text{ح ا})\,\text{ز} + (\text{ح}^2-\text{ا ب})\,\text{ی} = 0$

اس کو تیسرے مساوات معلوم کے ساتہہ شامل کرو پس بموجب دفعہ ۳۸۵

$$\frac{\text{لا}}{(\text{ب}+\text{ح})\,\text{ص}} = \frac{\text{ز}}{(\text{ح}+\text{ا})\,\text{ص}} = \frac{\text{ی}}{(\text{ا}+\text{ب})\,\text{ص}}$$

اسمین ص بجای $\text{ا}^2+\text{ب}^2+\text{ح}^2-\text{ب ح}-\text{ح ا}-\text{ا ب}$ کے ہے پس یہہ سادی صورت حاصل ہوگی

$\frac{\text{لا}}{\text{ب}+\text{ح}} = \frac{\text{ز}}{\text{ح}+\text{ا}} = \frac{\text{ی}}{\text{ا}+\text{ب}} =$ ک کے فرض کرو

قیمت کو اول مساوات معلوم مین مندرج کرو تو $\text{ک} = \frac{1}{2}$

(۸۷) فرضکرو کہ کمپنی کا سرمایہ لا روپیہ ہے تو جو مقدار رونکو نفع کا حصہ تقسیم ہوا $\frac{5\text{لا}}{100} + \frac{7}{100}\times 40000$ روپیہ ہے اور یہہ برابر ہونا چاہیے $\frac{6}{100}(\text{لا}+40000)$

(۸۸) فرض کرو کہ وہ شخص لا میل فی گھنٹہ پہاڑ کی چڑہائی پر چڑہتا ہے اور ر میل فی گھنٹہ ہموار زمین پر چلتا ہے اور ی میل فی گھنٹہ پہاڑ سے اترتا ہے

تو $\frac{5}{\text{لا}} + \frac{4}{\text{ر}} + \frac{6}{\text{ی}} = 3\frac{13}{15}$ اور $\frac{6}{\text{لا}} + \frac{4}{\text{ر}} + \frac{5}{\text{ی}} = 4$ اور

جب وہ مقام ب کے طرف ادہی دور جاکر اولٹا چلا آتا ہے تو وہ ۵ پانچ میل پہاڑ پر چڑہتا ہے اور $2\frac{1}{2}$ میل ہموار زمین پر اور ۵ میل پہاڑ پر سے اترتا ہے اسلئے $\frac{5}{\text{لا}} + \frac{5}{2\text{ر}} + \frac{5}{\text{ی}} = 3\frac{11}{12}$

اول مساوات کو دوم مساوات مین سے تفریق کرو تو $\frac{1}{\text{لا}} - \frac{1}{\text{ی}} = \frac{2}{15}$ پہر دوسرے مساوات کو ۵ مین ضرب دو اور تیسرے مساوات کو ۴ مین اور تفریق کرو تو

$$\frac{1}{\text{لا}} + \frac{5}{\text{ی}} = 4\frac{1}{3}$$

(۱۱۸) اول فرض کرو کہ ر بڑا م سے نہیں ہے تو سر مطلوب وہ ہوگا کہ $\frac{(ن - م + ۱)\, لا (۱ - لا)}{(۱ - لا)^{۲}}$ کی صورت مفصلہ سے پیدا ہوگا یعنے $(ن - م + ۱)\, لا (۱ - لا)^{-۱}$ کے صورت مفصلہ سے سیواسطی سر ن - م + ۱ ہے دوم فرض کرو کہ ر درمیان م + ۱ اور ن + ۱ واقع ہے اور یہہ دونو داخل ہیں تو علاوہ ن - م + ۱ کے ہم کو $\frac{لا^{ر+۱}}{(۱ - لا)^{۲}}$ کی صورت مفصلہ سے سر دریافت کرنا ہے یعنے $- لا^{ر+۱} (۱ - لا)^{-۲}$ کے صورت مفصلہ سے یعنے - (ر - م) بموجب فقرہ ۲۱۵ کے سیواسطے کل سر ن - م + ۱ - (ر - م) یعنے ن - ر + ۱ ہے آخر یہہ فرض کرو کہ ر بڑا ن + ۱ سے ہے تو علاوہ ن - ر + ۱ کے جسکو ابھی دریافت کیا ہے ہم کو $\frac{لا^{ن+۲}}{(۱ - لا)^{۲}}$ کی صورت مفصلہ سے سر دریافت کرنا ہے یعنی $لا^{ن+۲} (۱ - لا)^{-۲}$ کی صورت مفصلہ سے یعنی ر - ن + ۱ بموجب فقرہ ۲۱۵ کی سیواسطی کل سر ن - ر + ۱ + ر - ن - ۱ یعنے صفر ہے

(۱۱۹) $\sqrt{ن^{۲} + ۱} - ن = \left[\sqrt{ن^{۲}+۱} - ن\right] \frac{\sqrt{ن^{۲}+۱} + ن}{\sqrt{ن^{۲}+۱} + ن} = \frac{۱}{\sqrt{ن^{۲}+۱} + ن}$

اور یہہ بڑا $\frac{۱}{۲(ن+۱)}$ سے ہی اور سیواسطی بڑا $\frac{۱}{۲(ن+۱)}$ سے اسے معلوم ہوا کہ سلسلہ مفروض بڑا $\frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \ldots\right]$ سے ہے اور سیواسطی بموجب فقرہ ۵۶۲ کے انفراجی ہے

(۱۲۰) لوک $\frac{۱}{(۱٫۰۵)^{۱۳}} = -۱۳$ لوک $۱٫۰۵ = -۱۳ \times ۰٫۰۲۱۱۸۹۳ = -۰٫۲۷۵۴۶۰۹$

$= -۱ + ۰٫۷۲۴۵۳۹۱ =$ لوک ۰٫۵۳۰۳۲۱۴

لوک $\frac{۱}{(۱٫۰۵)^{۲۰}} = -۲۰$ لوگ $۱٫۰۵ = -۲۰ \times ۰٫۰۲۱۱۸۹۳ = -۰٫۴۲۳۷۸۶$

$= -۱ + ۰٫۵۷۶۲۱۴ =$ لوگ ۰٫۳۷۶۸۸۹۴

پس $\frac{۱}{۰٫۰۵}\left[۰٫۵۳۰۳۲۱۴ - ۰٫۳۷۶۸۵۹۴\right] = ۲۰ \times ۰٫۱۵۳۴۳۲ = ۳٫۰۶۸۶۴$

(۱۲۱) انتقال اور مجذور کرنے سے

$۴ + ۵لا - لا^{۲} - ۲(۴ + ۵لا - لا^{۲})^{\frac{۱}{۲}} (لا^{۲} + ۳لا - ۴)^{\frac{۱}{۲}} + لا^{۲} + ۳لا - ۴ = ۸لا$

اسیواسطے (۴ + ۵ لا - لا^۲)^½ (لا^۲ + ۳ لا - ۴)^½ = ۰

اسیواسطے کیا تو ۴ + ۵ لا - لا^۲ = ۰ یا لا^۲ + ۳ لا - ۴ = ۰

(۱۲۲) فرض کرو کہ صہ ایک قیمت کو اور ۲ صہ دوسری قیمت کو تعبیر کرتا ہی تو ا صہ^۲ + ب صہ + ح = ۰ اور ۴ ا صہ^۲ + ۲ ب صہ + ح = ۰ اسیواسطے تفریق کرنے سی ۳ ا صہ^۲ + ب صہ = ۰ اسیواسطے صہ = - ب/۳ا اس قیمت صہ کو مندرج کرو تو ب^۲/۹ا - ب^۲/۳ا + ح = ۰ اسیواسطے ۲ ب^۲ = ۹ ا ح

(۱۲۳) (لا + ی)/۱۲ = ۷/(لا + ی + ۵) اسیواسطے (لا + ی)^۲ + ۵ (لا + ی) = ۸۴ اس سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ لا + ی = ۷ یا - ۱۲ پھر ۱/لا + ۱/ی = (لا + ی)/۱۲ اسیواسطے لا ی = ۱۲

(۱۲۴) فرض کرو کہ لا اور ی اور ی تین حصے ہین تو لا ی/۴ = ی ی/۵ = ی لا/۶ اور لا + ی + ی = ۱۱۱ پس لا = ۴ ی/۸ اور ی = ۵ لا/۶ = ۲ ی/۳ انکو مندرج کرو تو

۴ ی/۵ + ۲ ی/۳ + ی = ۱۱۱

(۱۲۵) دفعہ ۳۴۵ دیکھو ان کی دونو قیمتین مثبت ہونی چاہیئے پس قیمتون کا مجموعہ اور فرق دونو کیا جفت صحیح اعداد ہونگے یا دونو طاق صحیح اعداد ہونگے اسیواسطے ب - ۲ ا/ب ایک مثبت صحیح عدد ہونا چاہیئے اور (۲ ا/ب - ۱)^۲ + ۸ ص/ب ایک مثبت صحیح عدد ہونا چاہیئے اور ایک مجذور کامل ہو اور اسکے دونو صحیح اعداد جفت ہونی چاہیئے یا دونو طاق اور اول صحیح کا مجذور بڑا دوسرے کے مجذور سے ہونا چاہیئے

(۱۲۶) ہم کو اس سلسلہ ۱/د + ۱/در + ۱/در^۲ کی ن رقمون کا مجموعہ دریافت کرنا ہے اور یہہ مجموعہ = ۱/د ۰ (۱ - ۱/ر^ن)/(۱ - ۱/ر) = (۱ - ر^ن)/(د ر^(ن-۱) (۱ - ر))

(۱۲۷) ہم اول اوس آدمی کو ن چیزین م ن (م ن - ۱) ۰ ۰ (م ن - ن + ۱)/|ن طورون سے دی سکتے ہین تو م ن - ن چیزین باقی رہین انمین سی ن چیزین دوسرے آدمی کو (م ن - ن) (م ن - ن - ۱) ۰ ۰ (م ن - ۲ ن + ۱)/|ن طورون سے دی سکتے ہین اور علیٰ ہذا القیاس

(۱۳۲) فرض کرو کہ سہ اور صہ قیمتیں ہوں سہ + صہ = ب/د اگر سہ اور صہ ایک ہی علامت رکھیں تو وہ علامت ب/د کی ہوگی اور اگر سہ اور صہ کی مختلف علامتیں ہوں تو دونوں میں جو تعداداً بڑا ہوگا اوسکی علامت ب/د ہوگی اور ایسی ہی ۱/سہ + ۱/صہ = ب/ج پس ب/ج کی علامت وہی ہے جو اوسکی علامت ہے کہ دونو ۱/سہ اور ۱/صہ میں سے تعداداً بڑا ہے یعنی وہی علامت ہے جو اوسکی علامت ہے کہ دونو سہ اور صہ میں سے تعداداً چھوٹا ہے

(۱۳۳) فرض کرو کہ لا − ا = طر اور ؤ − ب = بر اور ی − ح = مر پس ان کو لا اور ؤ اور ی کی جگہہ رکھو تو یہہ حاصل ہوگا طر + بر + مر = ۰ اور طر/ا + بر/ب + مر/ح = ۰ اور طر² + بر² + مر² + ۲ طر ا + ۲ بر ب + ۲ مر ح = ۰ اول اور دوسری مساواتون سے بموجب فقرہ ۳۸۵ کے ہم کو یہہ حاصل ہے کہ طر/(۱/ح − ۱/ب) = بر/(۱/ا − ۱/ح) = مر/(۱/ب − ۱/ا) = ک اسکو آخر مساوات میں مندرج کرو تو

ک² [(ب − ح)²/(ب² ح²) + (ح − ا)²/(ا² ح²) + (ا − ب)²/(ا² ب²)] + ۲ک [ا(ب − ح)/(ب ح) + ب(ح − ا)/(ا ح) + ح(ا − ب)/(ا ب)] = ۰

اسواسطے ک = ۰ یا ک = − ۲ ا ب ح · [ا² (ب − ح) + ب² (ح − ا) + ح² (ا − ب)] / [ا² (ب − ح)² + ب² (ح − ا)² + ح² (ا − ب)²]

(۱۳۴) فرض کرو کہ زید نے لا ہاف کرون اور ؤ شلنگ اور ی سکس پنس لئے اور بکر نے طر ہاف کرون اور بر شلنگ اور مر سکس پنس لئے تو

۵ لا + ۲ ؤ + ی = ۵ طر + ۲ بر + مر اور ۵(لا + طر)/۱۵ = ۲(ؤ + بر)/۴ = (ی + مر)/۱ = ک کو فرض کرو لا + ؤ + ی = ۶۰ اور طر + بر + مر = ۶۰ اور لا = طر + ۲

پس لا + طر = ۳ک اور ؤ + بر = ۲ک اور ی + مر = ک اسواسطے

لا + ؤ + ی + طر + بر + مر = ۶ک یعنی ۱۲۰ = ۶ک پس ک = ۲۰ اسی معلوم ہوا کہ

لا + طر = ۶۰ اور لا − طر = ۲ اسیواسطے لا = ۳۱ اور طر = ۲۹ اور

(۱۳۵) ہم کو یہہ معلوم ہے کہ ۱/ق = ا + (ع − ۱) ب اور ۱/ج = ا + (ق − ۱) ب

تفریق کرنے سے ۱/ق − ۱/ع = (ع − ق) ب اسواسطی ب = ۱/ع ق اب اس ب کے قیمت کو مندرج کرو تو ۱/ق = ۱ + (ق − ۱)/ع ق اسواسطی ا = ۱/ع ق پس ن رقموں کا مجموعہ

= ن/۲ (ن + ۱) ۱/ع ق اور یہہ = (ع ق + ۱)/۲ اگر ن = ع ق

(۱۳۶) ہمکو معلوم ہے کہ ب = (ا + ج)/۲ اور صہ = ۲ سہ لر/(سہ + لر) اور سہ/لر + لر/سہ = ا/ج + ج/ا

اسے معلوم ہوا کہ (ب صہ)^۲ = (ا + ج)^۲ سہ^۲ لر^۲/(سہ + لر)^۲ لیکن (سہ^۲ + لر^۲)/سہ لر = (ا^۲ + ج^۲)/ا ج

اسواسطی (سہ + لر)^۲/سہ لر = (ا + ج)^۲/ا ج اسواسطی (ا + ج)^۲/(سہ + لر)^۲ = ا ج/سہ لر پس

(ب صہ)^۲ = ا ج سہ لر

(۱۳۷) اب تین حروف صحیح مین سے ۲ حرف لو اور ایک کو لفظ کے اول مین اور دوسرے کو لفظ کے آخر مین رکہو تو ایسی ۶ صورتین پیدا ہونگی اب باقی حرف مین ۱۰! ترتیبین بنتی ہین پس کل الفاظ ۶ × ۱۰! ہوئے

(۱۳۸) ہم کو معلوم ہے کہ (۱ + لا)^۲ن = ا. + ا₁ لا + ا₂ لا^۲ + ا₃ لا^۳ + ...

(۱ − ۱/لا)^۲ن = ا. − ا₁/لا + ا₂/لا^۲ + ا₃/لا^۳ + ...

پس ا.^۲ − ا₁^۲ + ا₂^۲ − ا₃^۲ + . . . ایک ایسی رقم (۱ + لا)^۲ن اور (۱ − ۱/لا)^۲ن کے حاصلضرب مین ہے کہ جسمین لا شامل نہین ہے اور

(۱ + لا)^۲ن × (۱ − ۱/لا)^۲ن = (لا + ۱)^۲ن (لا − ۱)^۲ن/لا^۲ن = (لا^۲ − ۱)^۲ن/لا^۲ن

پس جس رقم مین کہ لا شامل نہین ہے وہ صورت مفصلہ (لا^۲ − ۱)^۲ن مین لا^۲ن کا ضرب ہے اور یہہ (−۱)^ن ۲ن!/(ن! ن!) ہے

(۱۳۹) ن وین رقم ۱/ن^(۱/ن) ہے اور ن^(۱/ن) چہوٹا ۲ سے ہے اسلئے کہ (۱+۱)^ن = ۱ + ن + . . . پس ۲^ن بڑی ن سے ہے اور اسواسطے ۲ بڑا ن^(۱/ن) سے ہے، پس سلسلہ کی ہر ایک رقم ۱/۲ سے بڑی ہے اسلئے بموجب دفعہ ۵۵ کے سلسلہ انفراجی ہے

(۱۴۰) مساوات معلوم سے ہمکو یہہ حاصل ہے کہ ی = لوگ (۱ + لا) اسواسطی ئی = ۱ + لا

اسیواسطی لا = ی - ۱ = ی + ی۲/۲ + ی۳/۳ + ...

(۱۴۱) لا۲ - ۳ لا + ۷ + ۲ √(لا۲ - ۳ لا + ۷) + ۱/۴ = ۲۰ ۱/۴ اسیواسطے

√(لا۲ - ۳ لا + ۷) + ۱/۲ = ± ۹/۲ یہہ قیمت √(لا۲ - ۳ لا + ۷) = - ۵ ٹھیک

مساوات مین نہین بیٹھتی اسلئے √(لا۲ - ۳ لا + ۷) = ۴ کو اختیار کرو

(۱۴۲) فرض کرو کہ بہری ہوئی مربع کی صف مقابل مین سپاہیون کی تعداد لا ہے تو کل سپاہیون کی تعداد لا۲ ہوگی اور خالی مربع کی صف مقابل مین لا + ۲۴ آدمی کہڑے ہین اور اوسمین چار چار صفین ہین اسلئے اس مربع سپاہیون کی تعداد (لا + ۲۴)۲ - (لا + ۲۴ - ۸)۲ ہے پس لا۲ = ۴ [(لا + ۲۴)۲ - (لا + ۱۶)۲] = ۶۴ (۲ لا + ۴۰)

اسیواسطی لا۲ - ۱۲۸ لا = ۲۵۶۰ پس اس مساوات کی قیمت جو مساوات مین سما سکتی ہے ۱۶۰ ہے

(۱۴۳) ۶ لا۲ - لا ی - ۱۲ ی۲ = ۰ مین ی = ن لا رکہو تو (۶ - ن - ۱۲ ن۲) لا۲ = ۰

ایک حل لا = ۰ مساوات سے تعلق نہین رکہہ سکتا پس ۶ - ن - ۱۲ ن۲ = ۰ اسسے

ن = ۲/۳ یا - ۳/۴ کو حاصل ہوگا ان دونو قیمتون کو دوسری مساوات مین مندرج کرو تو

ی = ۲ لا/۳ اور ی = - ۳ لا/۴

(۱۴۴) فرض کرو کہ ۲۰ سے بڑا کوئی عدد و ہے تو جب گاڑیون کی رفتار ۲۰ میل کی جگہہ و میل ہے تو آمدنی کی افزایش ع (و - ۲۰) اور خرچ کی افزایش ق (و - ۲۰)۲ ہے اسمین ع اور ق خاص مقادیر معینہ ہین پس فائدہ ع (و - ۲۰) - ق (و - ۲۰)۲ ہے اور یہہ فائدہ اوس حالت مین کہ و = ۴۰ ہو معدوم ہوجاتا ہے تو

۲۰ ع - ۴۰۰ ق = ۰ اسیواسطی ع = ۲۰ ق پس فائدہ

ق [۲۰ (و - ۲۰) - (و - ۲۰)۲] یعنی ق [۶۰ و - و۲ - ۸۰۰]

یعنی ق [۱۰۰ - (و - ۳۰)۲] ہے اسی معلوم ہو کہ نفع اعظم جب ہوگا کہ و = ۳۰ ہو

(۱۴۵) ۱۳ کے اضعاف کو صنف (۱۳) سے تعبیر کرو تو

$۱۰ = ۱۳ - ۳$ اور $۱۰۰ =$ صف $(۱۳) - ۴$ اور $۱۰۰۰ =$ صف $(۱۳) - ۱$

$۱۰^۴ = ۱۰ \times ۱۰^۳ =$ صف $(۱۳) + ۳$

$۱۰^۵ = ۱۰^۲ \times ۱۰^۳ =$ صف $(۱۳) + ۴$

$۱۰^۶ = ۱۰^۳ \times ۱۰^۳ =$ صف $(۱۳) + ۱$

$۱۰^۷ = ۱۰ \times ۱۰^۶ =$ صف $(۱۳) - ۳$.

اور علیٰ ہٰذا القیاس

پس $ع_. + ۱۰^۳ ع_۳ + ۱۰^۶ ع_۶ + \dots =$ صف $(۱۳) + ع_. - ع_۳ + ع_۶ - \dots$

$۱۰ ع_۱ + ۱۰^۴ ع_۴ + ۱۰^۷ ع_۷ + \dots =$ صف $(۱۳) - ۳ (ع_۱ - ع_۴ + ع_۷ - \dots)$

$۱۰^۲ ع_۲ + ۱۰^۵ ع_۵ + ۱۰^۸ ع_۸ + \dots =$ صف $(۱۳) - ۴ (ع_۲ - ع_۵ + ع_۸ - \dots)$

اسسے معلوم ہوا کہ عدد مفروض

$=$ صف $(۱۳) + ع_. - ع_۳ + ع_۶ - \dots - ۳ (ع_۱ - ع_۴ + ع_۷ - \dots) - ۴ (ع_۲ - ع_۵ + ع_۸ - \dots)$

(۱۴۶) فرض کرو کہ $ص = ا + ا ر + ا ر^۲ + \dots + ا ر^{ن-۱}$

$ص' = ا - ا ر + ا ر^۲ + \dots + ا (-۱)^{ن-۱} ر^{ن-۱}$

پس $ص = ا \frac{ر^ن - ۱}{ر - ۱}$ اور $ص' = ا \frac{۱ - (-ر)^ن}{۱ + ر} = ا \frac{۱ + ر^ن}{۱ + ر}$ کیونکہ ن طاق ہے

اسیواسطے $ص ص' = \frac{ا^۲ (ر^{۲ن} - ۱)}{ر^۲ - ۱}$ اور یہ سلسلہ $ا^۲ + ا^۲ ر^۲ + ا^۲ ر^۴ + \dots$ کی ن رقموں کا مجموعہ ہے

(۱۴۷) خطوط مستقیم کو اعداد ۱ و ۲ و ۳ ... ن سے تعبیر کرو اور ان نقاط تقاطع کا مجموعہ سطح بناؤ کہ ۱ و ۲ کا تقاطع اور ۲ و ۳ کا تقاطع ... ن − ۱ اور ن کا تقاطع اور ن اور ۱ کا تقاطع پس ہر یک خط پر صرف دو نقطے ہونگے اور ہمکو دو ہی نقطے ایک خط پر مقرر کرنی چاہیئے اسلئے کہ اور طرح سے ایک خط مستقیم پر یا خطوط مستقیم پر دو سے زیادہ نقطے مقرر ہو جائینگے پس ہمکو اسسے معلوم ہوا کہ اس مثال کا حال ایسا ہی ہے جیسا کہ باب ۳۴ کی ۱۲ مثال کا

(۱۴۸) $۴^{\frac{۱}{۸}} = ۲^{\frac{۲}{۸}}$ اور $۸^{\frac{۱}{۱۶}} = ۲^{\frac{۳}{۱۶}}$ اور $۱۶^{\frac{۱}{۳۲}} = ۲^{\frac{۴}{۳۲}}$ ... پس
جملہ مفروضہ برابر ۲ کے اوس قوت کے جو $\frac{۱}{۴} + \frac{۲}{۸} + \frac{۳}{۱۶} + \frac{۴}{۳۲} + \dots$ سے
تعبیر ہوتی ہے یعنی $\frac{۱}{۴}\left(۱ - \frac{۱}{۲}\right)^{-۲}$ سے یعنے ۱ سے

(۱۴۹) دفعہ ۲۹ ۵ کے موافق ہمکو یہہ حاصل ہے کہ
ق + ۲ ر + ۳ ص + ۴ ط = ۴ اور ع + ق + ر + ص + ط = −۳

پس سر

ع	ق	ر	ص	ط
−۴	۰	۰	۰	۱
−۵	۱	۰	۱	۰
−۵	۰	۲	۰	۰
−۶	۲	۱	۰	۰
−۷	۴	۰	۰	۰

$$(-۳)(-۱) + (-۳)(-۴)(-۳)$$
$$+ \frac{(-۳)(-۴)}{۲!}(-۱)^{۲}$$
$$+ \frac{(-۳)(-۴)(-۵)}{۲!}(-۱) +$$
$$+ \frac{(-۳)(-۴)(-۵)(-۶)}{۴!}$$

پس $۳ - ۳۶ + ۶ + ۳۰ + ۱۵$ یعنے ۱۸

(۱۵۰) فرض کرو کہ اساس ا و ا ر و ا ر۲ ... ا ر^ن−۱ ہوا ور مقادیر
ط۰ و ط۱ و ط۲ ... ط ن−۱ ہون اور لوکارثم مشترک لا ہو تو
ط۰ = ا^لا اور ط۱ = (ا ر)^لا اور ط۲ = (ا ر۲)^لا اور ط۳ = (ا ر۳)^لا ...
پس نسبت ط۱ کی ط۰ کے ساتھہ ر^لا ہے یعنی لا لوکارثم نسبت کر موافق اساس ر کی ہے

(۱۵۱) $۳ - \frac{۱۱}{۱ + ۲لا} + ۳ - \frac{۱۲}{۱ + ۳لا} = ۳ - \frac{۱۳}{۳ + ۲لا} + ۳ - \frac{۳}{۱ - لا}$

اسواسطے
$$\frac{۱۳}{۳ + ۲لا} - \frac{۱۱}{۱ + ۲لا} = \frac{۱۲}{۱ + ۳لا} - \frac{۳}{۱ - لا}$$

اسواسطے
$$\frac{۴لا - ۲۰}{(۱ + ۲لا)(۳ + ۲لا)} = \frac{۳لا - ۱۵}{(۱ - لا)(۱ + ۳لا)}$$

پس کیا لا = ۵ یا ۴ $(۱ + ۳لا)(۱ - لا) = ۳(۲لا + ۳)(۲لا + ۱)$

اب دوسری مساوات کا اختصار یہہ ہے کہ ۲۳ لا + ۱۳ = ۰

(۱۵۲) دفعہ ۴۳۳ مین مثال کے پہلے حصہ کا ذکر ہو چکا ہے — اب یہہ ظاہر ہے کہ مساوات کے

شرائط لا = ا اور لا = ب اور لا = ح سے پوری ہوتی ہین پس مساوات استطابقہ ہونی چاہئے اور یہہ بات اگر مساوات کے داہئین طرف کے ارقام کو مفرد اور مختصر بناؤ تو ظاہر ہوجائیگی

(۱۵۳) تقسیم کرنے سے (لا² + د²) لا / (لا² − د²) د = ۶ ۔ اسمین د = ن لا رکھو تو ۱ + ن² = ۶ (۱ − ن²) ن
اسے معلوم ہوا کہ ن = ½ یا ⅓ اور اول مساوات معلوم سے لا² (۱ + ن²) = ۹ ن

(۱۵۴) فرض کرو کہ گھنٹہ مین لا فیصدی تانبا تہا تو ۱۰۰ − لا فی صدی قلعی ہوگی اور جو ڈھیر گلایا گیا اوسمین د فیصدی برنج تہا اسیواسطے ۱۰۰ − د فیصدی گھنٹہ کا مادہ ہوگا
پس اب اس گلے ہوئے مادّے مین تانبے اور برنج اور قلعی کی مقدار پر علیحدہ علیحدہ خیال کرین تو یہہ مساواتین حاصل ہونگی

ج/۱۰۰ · ۹۱/۱۰۰ + (۱۰۰ − د)/۱۰۰ · لا/۱۰۰ = ۸۸/۱۰۰

د/۱۰۰ · ۶/۱۰۰ = ج ۴/۱۰۰

ج/۱۰۰ · ۳/۱۰۰ + (۱۰۰ − د)/۱۰۰ · (۱۰۰ − لا)/۱۰۰ = ج ۸/۱۰۰

ان مساواتون مین سے دوسے تیسری مساوات پیدا ہوتی ہے اسواسطے کہ تینون مساواتون کے جمع کرنے سے ہم کو ایک مساوات متطابقہ حاصل ہوتی ہے دوسری مساوات سے د = ۸۱ ¼ حاصل ہوتا ہے اول مساوات مین اوسکی مندرج کرنے سے لا = ۷۵ حاصل ہوتا ہے

(۱۵۵) فرض کرو کہ اول ن طبعی اعداد مین سے دو دو کے حاصلضربون کا مجموعہ ع ہے تو بموجب دفعہ ۲۲۵ کے ہم کو یہہ حاصل ہے کہ

(۱ + ۲ + ۳ + ۰۰ + ن)² = ۱² + ۲² + ۳² + ۰۰ + ن² + ۲ ع

یعنی [ن (ن + ۱) / ۲]² = ن (ن + ۱) (۲ ن + ۱) / ۶ + ۲ ع

اسے معلوم ہوا کہ ع = ن² (ن + ۱)² / ۸ − ن (ن + ۱) (۲ ن + ۱) / ۱۲

= ن (ن + ۱) / ۲۴ [۳ ن (ن + ۱) − ۲ (۲ ن + ۱)]

یعنی $-\frac{۱۵}{۲}+۳۰+\frac{۱۳۵}{۸}-\frac{۳۱۵}{۴}+\frac{۳۱۵}{۸}$ یعنی صفر

اب ہم اس نتیجہ کو آسانی سے ثابت بھی کر سکتے ہین کہ

$۱-۲\text{لا}+۳\text{لا}^{۲}-۴\text{لا}^{۳}+\cdots=(۱+\text{لا})^{-۲}$ پس ہکو $\left[(۱+\text{لا})^{-۲}\right]^{-\frac{۳}{۴}}$ مین

$\text{لا}^{۳}$ کا سر دریافت کرنا ہے یعنی $(۱+\text{لا})^{۲}$ اور یہہ ظاہر ہے کہ اسمین $\text{لا}^{۳}$ کا سر صفر ہے

(۱۶۰) فرض کرو کہ آغاز ماہ مین آبادی ع ہے تو مہینے کے آخر مین آبادی $\text{ع}+\frac{\text{ع}}{۴۸۰}-\frac{\text{ع}}{۶۰۰}$

یعنی $\text{ع}+\frac{۵\text{ع}}{۲۴۰۰}-\frac{۴\text{ع}}{۲۴۰۰}$ یعنی $\frac{۲۴۰۱}{۲۴۰۰}$ ع ہوگی اور اسی طرح سے دوسرے مہینے کے آخر مین آبادی $\frac{۲۴۰۱}{۲۴۰۰}\times\frac{۲۴۰۱}{۲۴۰۰}$ ع یعنی $\left(\frac{۲۴۰۱}{۲۴۰۰}\right)^{۲}$ ع ہوگی

اور علی ہذا القیاس ن مہینہ کے آخر مین آبادی $\left(\frac{۲۴۰۱}{۲۴۰۰}\right)^{\text{ن}}$ ع ہوگی اب

فرض کرو کہ ن مہینہ مین آبادی دوگنی ہوگی تو

$\left(\frac{۲۴۰۱}{۲۴۰۰}\right)^{\text{ن}}\text{ع}=۲\text{ع}$ اسیواسطے $\left(\frac{۲۴۰۱}{۲۴۰۰}\right)^{\text{ن}}=۲$ طرفین مساوات کی لوگارثم لو تو ن لوگ $\frac{۲۴۰۱}{۲۴۰۰}$ = لوگ ۲ یعنی ن لوگ (۲۴۰۱ − لوگ ۲۴۰۰) = لوگ ۲

یعنی ن $\left[\text{لوگ }۷^{۴}-\text{لوگ }(۳\times۸\times۱۰۰)\right]$ = لوگ ۲

اسیواسطے ن = $\frac{\text{لوگ }۲}{۴\text{ لوگ }۷-\text{لوگ }۳-۳\text{ لوگ }۲-۲}=\frac{۰٫۳۰۱۰۳۰۰}{۰٫۰۰۰۱۸۰۷}=۱۶۶۶$ تقریباً

(۱۶۱) یہان $\text{لا}^{۴}+۱=۲(\text{لا}^{۴}+۴\text{لا}^{۳}+۶\text{لا}^{۲}+۴\text{لا}+۱)$ اسیواسطے انتقال ارقام سے

$\text{لا}^{۴}+۸\text{لا}^{۳}+۱۲\text{لا}^{۲}+۸\text{لا}+۱=۰$ تقسیم $\text{لا}^{۲}$ پر کرو تو $\text{لا}^{۲}+\frac{۱}{\text{لا}^{۲}}+۸\left(\text{لا}+\frac{۱}{\text{لا}}\right)+۱۲=۰$

یعنی $\left(\text{لا}+\frac{۱}{\text{لا}}\right)^{۲}+۸\left(\text{لا}+\frac{۱}{\text{لا}}\right)+۱۰=۰$ پس اس مساوات درجہ دوم کو حل کرکے ہم

$\text{لا}+\frac{۱}{\text{لا}}=-۴\pm\sqrt{۶}$ حاصل کرینگے اور اسے لا دریافت کرین گے

(۱۶۲) فرض کرو کہ اول دور مین زید لا میل فی گھنٹہ کی رفتار سے اور بکر ی میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چلا تو $\frac{۲}{\text{لا}}-\frac{۲}{\text{ی}}=\frac{۲}{۶۰}$ اور $\frac{۲}{\text{ی}-۲}-\frac{۲}{\text{لا}+۲}=\frac{۲}{۶۰}$ اسیواسطے

$۶۰(\text{لا}-\text{ی})=\text{لا ی}$ اور $۶۰(\text{لا}-\text{ی}+۴)=(\text{ی}-۲)(\text{لا}+۲)$ تفریق کرو تو

$۱۲۰(\text{لا}-\text{ی}+۲)=-۲(\text{لا}-\text{ی}+۲)$ اسیواسطے $\text{لا}-\text{ی}+۲=۰$

(۱۶۳) دوسری مساوات کو سادہ بناؤ تو ۲ لا ی + ۴ ی = ۰ اسیواسطی کیا ی = ۰ یا لا = -۲
مساوات اول مین ی = ۰ کو مندرج کرو تو ی = ۱۹/۷ حاصل ہوگا

(۱۶۴) دفعہ ۳۸۴ کے موافق ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

(لا + ی + ی) / (لا + ی + ۱ + ی + لا + لا + ی - ۱) = لا + ی + ی یعنی (لا + ی + ی) / ۲ (لا + ی + ی) = لا + ی + ی

پس کیا تو لا + ی + ی = ۰ یا لا + ی + ی = ۱/۲ اگر اول مساوات کو لین تو
لا = ۰ اور ی = ۰ اور ی = ۰ اگر دوسری مساوات کو لین تو ہمکو لا = ۱/۲ (ی + ی + ۱)

ی = ۱/۲ (ی + لا) اور ی = ۱/۲ (لا + ی - ۱) اسسے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

لا = ۱/۲ اور ی = ۱/۴ اور ی = -۱/۴

(۱۶۵) ۱۰ کے اضعاف کو ضف (۱۰) سے تعبیر کرو تو

۱۰ = ۱۰۱ - ۱ اور ۱۰^۲ = ضف (۱۰۱) - ۱۰۰ اور ۱۰^۳ = ضف (۱۰۱) + ۱

اور ۱۰^۵ = ضف (۱۰۱) + ۱۰ اور علی ہذا القیاس پس

ع. + ۱۰ ع۱ + ۱۰^۲ ع۲ + ۱۰^۳ ع۳ + ...

= ضف (۱۰۱) + ع. + ۱۰ ع۱ - ع۲ - ۱۰ ع۳ + ع۴ + ۱۰ ع۵ - ...

(۱۶۶) ہمکو حاصل ہے کہ ا = (ب + ح)/۲ اور ح = ۲ اب/(ا + ب) اسیواسطی ح (ا + ب) = (ب + ح) ب
اسیواسطی ا ح = ب^۲ اور ۲ ا = ب + ح = ب + ۲ اب/(ا + ب) اسیواسطی
(۲ ا - ب) (ا + ب) = ۲ اب اسیواسطی ب^۲ + ب ا - ۲ ا^۲ = ۰ اسیواسطی
ب = ا یعنی -۲ ا اگر ب = ا تو ح = ا اگر ب = -۲ ا تو ح = ۴ ا

(۱۶۷) اول خطوط کے مجموعہ مین سے دو خطوط مستقیم لو اور باقی دو مجموعون مین سے ایک خط مستقیم
تو کل مثلث ان خطوط سے م(م-۱)/۲ (ن + ع) مثلث پیدا ہونگے اور اسیطرح اگر دوسرے
مجموعہ مین سے دو خط مستقیم لین اور باقی دو مجموعون مین سے ایک ایک اور ایسی ہی تیسرے
مجموعہ مین سے دو خط مستقیم اور باقی مجموعون مین سے ایک ایک خط مستقیم اور پہر آخر کو

ہر مجموعہ مین سے ایک خط مستقیم لو تو م ن ع مثلث پیدا ہونگے

(۱۶۸) (۱ − لا)^{-۲} (۱ − لا)^ن = (۱ − لا)^{ن−۲} ہر طرف کو پھیلاؤ اور لا^{ر−۱} کے سر کو منتخب کرو

اب دائین طرف ہم سر اس حاصل ضرب سے دریافت کرتے ہین کہ

[۱ + ۲ لا + ۳ لا^۲ + ۰۰ + (ر + ۱) لا^ر + ۰۰] [۱ − ن لا + ن(ن−۱)/۲ لا^۲ + ۰۰]

اب یہان یہہ امر اسانی سے معلوم ہوتا ہے کہ سر وہی ہے جو مقدار ا_ر سے تعبیر کیا گیا ہے

پس ا_ر برابر لا^{ر−۱} کے سر کے صورت مفصلہ (۱ − لا)^{ن−۲} مین ہونا چاہیئے اسے ثابت

ہوا کہ ا_ر = ۰ اگر ر − ۱ بڑا ن − ۲ سے ہو اور ا_ر = (−۱)^{ن−۳} = (−۱)^ن اگر ر − ۱ = ن − ۲

اور اگر ر − ۱ چھوٹا ن − ۲ سے ہو تو بموجب دفعہ ۵۰۸ کے یہہ حاصل ہوگا کہ

ا_ر = (−۱)^{ن−۲} ا_{ن−ر}

(۱۶۹) دفعہ ۵۲۹ کی طرح ہم کو یہہ حاصل ہے کہ

ق + ۲ر + ۳ط = ۶ اور ع + ق + ر + ط = ۷/۳

سر = ۷/۳ . ۴/۳ (−۱) (−۳) + [۷/۳ . ۴/۳ . ۱/۳ (−۱)^۲ / ۲] + [۷/۳ . ۴/۳ . ۱/۳ (−۳)^۳ / ۳]

+ [۷/۳ . ۴/۳ . ۱/۳ (−۲/۳) / (۲ . ۲)] ۴ (−۳)^۲

+ [۷/۳ . ۴/۳ . ۱/۳ (−۲/۳) (−۵/۳) / ۴] ۴ (−۳)

+ [۷/۳ . ۴/۳ . ۱/۳ (−۲/۳) (−۵/۳) (−۸/۳) / ۶] ۲

ع	ق	ر	ط
۱/۳	۰	۱	۱
−۲/۳	۲	۰	۱
−۲/۳	۰	۳	۰
−۵/۳	۲	۲	۰
−۸/۳	۴	۱	۰
−۱۱/۳	۶	۰	۰

یعنی ۲۸/۳ − ۵۶/۲۷ − ۱۴/۳ − ۵۶/۹ − ۷×۵×۴/۳^۶ − ۲×۷/۳^۶ یعنی − ۳۰۷۲۶/۳^۶

(۱۷۰) فرض کرو کہ لوکارثم مطلوب کو لا تعبیر کرتا ہے تو (۲۵)^لا = ۵۰ یعنے ۵^{۲لا} = ۵۰

یعنی (۱۰/۲)^{۲لا} = ۱۰۰/۲ اب لوکارثم موافق اساس ۱۰ کے لو تو ۲ لا (لوک ۱۰ − لوک ۲)

= لوگ ۱۰۰ − لوک ۲ پس لا = (۲ − لوک ۲) / ۲(۱ − لوک ۲) = ۱٫۶۹۸۹۷ / ۲ × ۰٫۶۹۸۹۷ = ۱٫۲۱۵۳۴

(۱۷۱) لا + لا^{-۱} = (لا^{۱/۳} + لا^{-۱/۳}) (لا^{۲/۳} − ۱ + لا^{-۲/۳}) پس اس سے معلوم ہوا کہ

پس اگر وہ سب ملکر کام کرتے تو ایک دن مین $\frac{1}{9}$ حصہ کہیت کا کاٹتے۔
اسواسطے کل کہیت کو ۹ دن مین کاٹینگے

(۱۷۵) دفعہ ۳۴۴ کی ترکیب سی ہم ثابت کر سکتے ہین کہ اگر ہمارے پاس ان اوزان مین سے ۱ چھٹانک ۵ چھٹانک 5^2 چھٹانک 5^3 چھٹانک 5^4 چھٹانک . . .
مین دو دو ہون تو ہم جتنی چھٹانک کے وزن کو چاہین تو تول سکتے ہین۔ پس اب اگر ہم یہہ چاہتے ہین کہ ۳۱۳ چھٹانک سے زیادہ وزن کو نہ تولین تو ہم کو کوئی وزن 5^5 کے دو وزنون سے زیادہ نہین چاہئے اسواسطے جو کم سے کم وزن 5^4 وزن تولنے کے لئے چاہیے وہ $5^4 - 2\times5^3 - 2\times5^2 - 2\times5 - 2$ یعنے ۳۱۴ چھٹانک

(۱۷۶) فرض کرو کہ اعداد ا اور ار اور ار² اور ار³ ہین تو ا(۱ + ر + ر² + ر³) = ۱۵
اور ا²(۱ + ر² + ر⁴ + ر⁶) = ۸۵ یعنی ا(۱ + ر)(۱ + ر²) = ۱۵ اور
ا²(۱ + ر²)(۱ + ر⁴) = ۸۵ اول مساوات کو مجذور کرو اور دوسری مساوات پر تقسیم کرو
تو $\frac{(۱+ر)^2(۱+ر^2)}{۱+ر^4} = \frac{۴۵}{۱۷}$ اسیواسطے
۱۷(۱ + ۲ر + ۲ر² + ۲ر³ + ر⁴) = ۴۵(۱ + ر⁴) اسیواسطی
۲۸(۱ + ر⁴) − ۳۴(ر + ر³) − ۳۴ر² = ۰
ر² پر تقسیم کرو تو ۲۸(ر² + $\frac{1}{ر^2}$) − ۳۴(ر + $\frac{1}{ر}$) − ۳۴ = ۰
اسیواسطی ۲۸(ر + $\frac{1}{ر}$)² − ۳۴(ر + $\frac{1}{ر}$) − ۹۰ = ۰
اسیواسطی ر + $\frac{1}{ر}$ = $\frac{5}{2}$ یعنے − $\frac{9}{7}$ دوسری مساوات سی ر کے ناممکن قیمتین حاصل ہوتی ہین اور پہلی مساوات سے ر = ۲ یا $\frac{1}{2}$ ان مین سے کوئی قیمت لین اوس سے معلوم ہوگا کہ اعداد مطلوب ۱ و ۲ و ۴ و ۸ ہین

(۱۷۷) فرض کرو کہ ع آدمی جسطرف بیٹھنا چاہتے تہے بیٹھ گئے تو اسطرف ن − ع نشستین بیٹھنے کے لئے خالی رہین تو وہ ۲ ان − ع − ق آدمیون سے بہری جا سکتی ہین جو سر ایک طرف

بیٹھ سکتے ہیں پس ن ـ ع آدمی $\frac{|\underline{ن-ع}}{|\underline{ن-ع-ق}\;|\underline{ق}}$ طوروں سے بیٹھ سکتے ہیں اب باقی آدمی دوسری طرف بیٹھینگے اور $|\underline{ن}$ ترتیبیں ہر ایک طرف آدمیوں کے بیٹھنے کی ہوسکتی ہیں

پس کل طور بیٹھنے کے $\frac{|\underline{ن}\;|\underline{ن}\;|\underline{۲ن-ع-ق}}{|\underline{ن-ع}\;|\underline{ن-ق}}$ ہوسکتی ہیں

(۱۷۸) $\frac{1}{4\text{لا}^2+6\text{لا}+9}=\frac{3-2\text{لا}}{27-8\text{لا}^3}$ پس ہم کو $\text{لا}^{ر}$ کا سر $\frac{3-2\text{لا}}{27}\left(1-\frac{8\text{لا}^3}{27}\right)^{-1}$ کی صورت مفصلہ میں دریافت کرنا ہے اور یہ سر $\frac{3}{27}\left(\frac{8}{27}\right)^{ر/3}$ ہے

(۱۷۹) فرض کرو کہ (س ن) $^{\text{ٹا}}$ چھوٹا ک سے ہے تو س چھوٹا ک ن سے ہوا اسی ثابت ہوا کہ ایک خاص رقم کے ماقبل ور مابعدی سلسلہ اوس سلسلہ ہندسیہ سے کم ہے جو اوس رقم سے شروع ہوتا ہے اور جسکی نسبت مشترک ک ہے اسیلئے اگر ک چھوٹا واحد سے ہو تو سلسلہ انضمامی ہے

$$(۱۸۰)\quad \left(1+\frac{1}{ن}\right)^{ن}=\left(\frac{ن}{ن+1}\right)^{-ن}=\left(1-\frac{1}{ن+1}\right)^{-ن}$$

$$\text{لوگ}\left(1-\frac{1}{ن+1}\right)^{-ن}=ن\left[\frac{1}{ن+1}+\frac{1}{2(ن+1)^2}+\frac{1}{3(ن+1)^3}+\cdots\right]$$

$$=(ن+1)\left[\frac{1}{ن+1}+\frac{1}{2(ن+1)^2}+\frac{1}{3(ن+1)^3}+\cdots\right]$$

$$-\left[\frac{1}{ن+1}+\frac{1}{2(ن+1)^2}+\frac{1}{3(ن+1)^3}+\cdots\right]$$

$$=1+\frac{1}{(ن+1)^2}+\frac{1}{2(ن+1)^3}+\frac{1}{3(ن+1)^4}+\cdots$$

$$-\left[\frac{1}{ن+1}+\frac{1}{2(ن+1)^2}+\frac{1}{3(ن+1)^3}+\cdots\right]$$

$$=1-\frac{1}{(ن+1)^2}-\frac{1}{2\times3(ن+1)^3}+\frac{1}{3\times4(ن+1)^4}\cdots$$

اب ہم دیکھتے ہیں کہ جیسا ن زیادہ ہوتا ہے ایسا ہی لوگارثم زیادہ ہوتا ہے اسیواسطے $\left(1+\frac{1}{ن}\right)^{ن}$ زیادہ ن کے ساتھ ہوتا ہے

(۱۸۱) یہہ ظاہر ہے کہ مساوات کے ایک قیمت لا = ۱ ہے اور مساوات کو ہم اس طرح

لکھہ سکتے ہین کہ $۹ لا^۲ - ۱ = ۴ لا^۲ (۳ لا - ۱)$ یعنی $(۳ لا - ۱)(۳ لا + ۱) = ۴ لا^۲ (۳ لا - ۱)$

پس مساوات کی دوسری قیمت $۳ لا - ۱ = ۰$ پس اگر مساوات کی سب قمون کو ایک طرف

لے آئین تو باقی مساوات $(لا - ۱)(۳ لا - ۱)$ پر تقسیم ہوگی دفعہ ۳۳۲ دیکھو اور

امتحان سے یہہ معلوم ہوتا ہے کہ مساوات اسطرح لکھی جاسکتی ہے کہ

$(لا - ۱)(۳ لا - ۱)(۲ لا + ۱)^۲ = ۰$ پس مساوات کی قیمتین ۱ و $\frac{۱}{۳}$ و $-\frac{۱}{۲}$ ہین

(۱۸۲) فرض کرو کہ اول تقسیم کے وقت زید و بکر و عمر کی عمرین ا، ا ر اور $ا ر^۲$

تھین اور لا روپیہ اونہین تقسیم ہوا تھا تو اول دفعہ مین زید کو $\frac{ا لا}{ا + ا ر + ا ر^۲}$ ہاتھہ

آیا تھا اور دوسری دفعہ مین اوسکو $\frac{(ا + ۵) لا}{ا + ۵ + ا ر + ۵ + ا ر^۲ + ۵}$ روپیہ ہاتھہ آیا

پس $\left[\frac{ا + ۵}{۱۵ + ا(۱ + ر + ر^۲)} - \frac{ا}{ا(۱ + ر + ر^۲)} \right] لا = ۱۷\frac{۱}{۲}$ اور علی ہذالقیاس

$\frac{ا ر + ۵}{۱۵ + ا(۱ + ر + ر^۲)} - \frac{ا ر}{ا(۱ + ر + ر^۲)} \,لا = \frac{۲}{۳}$

اور $ا ر^۲ + ۵ = ۲ (ا ر + ۵)$ اسیواسطے $ا (ر - ۲) = ۵$ اول مساوات

کو دوسری مساوات پر تقسیم کرو $\frac{۵(۱ + ر + ر^۲) - ۱۵}{ر(۱ + ر + ر^۲) - ۱۵} = ۷$ پس $\frac{ر^۲ + ر - ۲}{ر^۲ - ۲ ر + ۱} = ۷$

یعنی $\frac{(ر + ۲)(ر - ۱)}{(ر - ۱)^۲} = ۷$ اسسے معلوم ہوا $\frac{ر + ۲}{ر - ۱} = ۷$ اور اسیواسطے $ر = \frac{۳}{۲}$

اسیواسطے ا = ۲۰ اور اسسے لا = ۱۴۵ حاصل ہوتا ہے

اسیواسطے ا = ۲۰ اور اسسے ہم لا = ۱۴۵ حاصل ہوتا ہے

(۱۸۳) $لا + ی - (لا ی)^{\frac{۱}{۲}} = ۶۱$ اور $لا^{\frac{۱}{۲}} ی^{\frac{۱}{۲}} (لا^{\frac{۱}{۲}} + ی^{\frac{۱}{۲}}) = ۷۸$ اسیواسطے

$(لا^{\frac{۱}{۲}} + ی^{\frac{۱}{۲}})^۲ = \frac{(۷۸)^۲}{لا ی}$ اس مساوات مین سے تفریق کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$۳ (لا ی)^{\frac{۱}{۲}} = \frac{(۷۸)^۲}{(لا ی)} - ۶۱$ اور اس مساوات درجہ دوم سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$(لا ی)^{\frac{۱}{۲}} = ۳۶$ یا $-\frac{۱۶۹}{۳}$ دوسری مساوات سے ناممکن قیمتین حاصل ہوتی ہین اسلئے

پہلی مساوات کو اول مساوات کے ساتھہ شامل کرکے یہہ حاصل کرو کہ

لا = ۸۱ و ۱۶ اور ی = ۱۶ و ۸۱

(۱۸۴) $لا = ح ی + ب ای = ح ی + ب (ب لا + ا ی)$ اسیواسطے

لا(۱ - ب^۲) = د(ح + ا ب) اور پھر و = د ی + ح لا = ا(ب لا + ا د) + ح لا

اسیواسطی د(۱ - ا^۲) = لا(ح + ا ب) ضرب چلیپا لگاؤ تو لا^۲(۱ - ب^۲) = د^۲(۱ - ا^۲)

اسیواسطی لا^۲ / (۱ - ا^۲) = ی^۲ / (۱ - ح^۲) اور اسی طرح ہم ثابت کرسکتے ہین کہ ان کسور مین سے

ہر ایک = ی^۲ / (۱ - ح^۲) اور پہلے دو نتیجون کو اسمین ضرب دینے سے ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

لا د (۱ - ا^۲) (۱ - ب^۲) = لا د (ح + ا ب)^۲ اسیواسطے (۱ - ا^۲) (۱ - ب^۲) = (ح + ا ب)^۲

اسیواسطی ۱ = ا^۲ + ب^۲ + ح^۲ + ۲ ا ب ح

(۱۸۵) فرض کرو کہ کسی عدد کا اول مرتبہ ا ہی تو اس عدد کا مکعب برابر ا^۳ مع بعض اضعاف قسطاس کے ہوگا پس اوس عدد کے مکعب کے اول وہی ہندسہ ہوگا جو ا^۳ کے اول ہندسہ ہوگا اب فرض کرو کہ قسطاس عددی ۹ ہے تو ۳ و ۶ و ۹ کے اول ۰ ہے پس اول ہندسہ ۰ یا ۱ یا ۸ ہوگا

(۱۸۶) بموجب دفعہ ۲۷ کے ہم کو یہہ حاصل ہے کہ

(ب + ح + د + ش)^۳ = ۳ (ب + ح + د + ش) (ب^۲ + ح^۲ + د^۲ + ش^۲)

- ۲ (ب^۳ + ح^۳ + د^۳ + ش^۳) + ۶ (ح د ش + ب د ش + ب ح ش + ب ح د)

اور یہی قاعدہ ہر جملہ کثیر الارقام کے واسطے ہوسکتا ہے — اسی سے ہمکو یہہ حاصل ہوسکتا ہے

کہ ا^۳(۱ + ر + ر^۲ + ر^۳ + ...)^۳ = ۳ ا(۱ + ر + ر^۲ + ر^۳ + ...) ا^۲(۱ + ر^۲ + ر^۴ + ر^۶ + ...)

- ۲ ا^۳(۱ + ر^۳ + ر^۶ + ر^۹ + ...) + ۶ ع

اسمین بجائے حاصل ضرب مطلوب ع ہے پس

ا^۳ (۱ / (۱ - ر))^۳ = ۳ ا^۳ · ۱/(۱ - ر) · ۱/(۱ - ر^۲) - ۲ ا^۳ / (۱ - ر^۳) + ۶ ع

اسیواسطی ع = ا^۳/۶ [۱/(۱ - ر)^۳ - ۳/((۱ - ر)(۱ - ر^۲)) + ۲/(۱ - ر^۳)]

اگر ۳ ع = ا^۳ / (۱ - ر^۳) تو ہمکو یہہ حاصل ہوگا کہ ۱/(۱ - ر)^۳ = ۳/((۱ - ر)(۱ - ر^۲)) اسیواسطے

۱ + ر = ۳ (۱ - ر) اسے معلوم ہوا کہ ر = ۱/۲

(۱۸۷) فرض کرو کہ دوسرے برتن مین شراب کی بوتلون کی تعداد بعد ن دفعہ عمل مذکور کے $س_ن$ ہے تو پہلے برتن مین بوتلون کی تعداد $ا - س_ن$ ہے اب ج بوتلین اول برتن مین سے نکالین تو اوسمین شراب $\frac{ج}{ا}(ا - س_ن)$ بوتلین ہونگی اور دوسرے برتن سے ج بوتلین نکالین تو اوسمین $\frac{ج}{ب} س_ن$ بوتلین شراب کی ہونگی پس اس عمل کی بعد دوسرے برتن مین شراب کی بوتلون کی تعداد $س_ن + \frac{ج}{ا}(ا - س_ن) - \frac{ج}{ب} س_ن$ ہوگی اور اسکو ہم $س_{ن+۱}$ سے تعبیر کرتے ہین پس $س_{ن+۱} = ج + (۱ - \frac{ج}{ا} - \frac{ج}{ب}) س_ن$ ہے اور ہم اس نتیجہ کو اسطرح بھی لکھہ سکتے ہین کہ $س_{ن+۱} - \frac{اب}{ا+ب} = (۱ - \frac{ج}{ا} - \frac{ج}{ب})(س_ن - \frac{اب}{ا+ب})$ یعنی $س_{ن+۱} - ق = ع(س_ن - ق)$ جہان ع بجاے $۱ - \frac{ج}{ا} - \frac{ج}{ب}$ ہے اور ق بجاے $\frac{اب}{ا+ب}$ پس اس سے یہہ معلوم ہوتا ہے کہ $س_۱ - ق$ اور $س_۲ - ق$ اور $س_۳ - ق$ ایک سلسلہ ہندسیہ ہے جسکی نسبت مشترک ع ہے اسواسطے $س_ن - ق = (س_۱ - ق) ع^{ن-۱}$ $= (ج - ق) ع^{ن-۱}$ اسواسطے $س_۱ = ج$ پس $س_ن = \frac{اب}{ا+ب} + (ج - \frac{اب}{ا+ب}) ع^{ن-۱}$ اور $ج - \frac{اب}{ا+ب} = (۱ - ع) \frac{اب}{ا+ب} - \frac{اب}{ا+ب} = \frac{-ع\, اب}{ا+ب}$ اسیواسطے

$$س_ن = \frac{اب}{ا+ب}(۱ - ع^ن)$$

(۱۸۸) $\frac{۱+۲لا}{۱-لا^۳} = \frac{۱}{۱-لا} + \frac{لا}{۱+لا+لا^۲}$ پس

$$(۱+۲لا)(۱-لا^۳)^{-۱} = (۱-لا)^{-۱} + \frac{لا}{۱+لا}\left(۱ + \frac{لا^۲}{۱+لا}\right)^{-۱}$$

طرفین کو پھیلاؤ اور اونمین $لا^{۳ن+۲}$ کے سر منتخب کرو دائین طرف تو وہ صفر ہے اور بائین طرف $(۱-لا)^{-۱}$ مین تو ۱ ہی اور $\frac{لا}{۱+لا}\left(۱ + \frac{لا^۲}{۱+لا}\right)^{-۱} = \frac{لا}{۱+لا} - \frac{لا^۳}{(۱+لا)^۲} + \frac{لا^۵}{(۱+لا)^۳} - \cdots$ مین ہر ایک کو پھیلاؤ اور اوسمین $لا^{۳ن+۲}$ کا سر منتخب کرو ۳ امثال ۵۰ باب کے دیکھو پس جو مطابقہ اسطرح حاصل ہوا اونکو (۱-) سے مین ضرب دو تو نتیجہ مطلوب حاصل ہو جائیگا

(۱۸۹) یہان $\frac{س_{ن+۱}}{س_ن} = \frac{ن\, ن^{ن-۱} لا}{(ن+۱)^ن} = \frac{لا}{(۱+\frac{۱}{ن})^ن}$ اب $(۱+\frac{۱}{ن})^ن$ کی قیمت جب ن غیر متناہی ہو موجب دفعہ ۵۵۲ کے ی ہے پس بموجب دفعہ ۵۵۹ کے

سلسلہ تنہامی ہے اگر لا چھوٹا ی سے ہو اور بموجب مثال ۱۸۰ کے $(1+\frac{1}{ن})^{ن}$ زیادہ ن کے ساتھ ہوتا ہے پس $\frac{ی}{(1+\frac{1}{ن})^{ن}}$ ہمیشہ زیادہ واحد سے ہوگا خواہ ن کی کیسی ہی بڑی قیمت فرض کرو پس اس سے ثابت ہوا کہ لا = ی تو بموجب دفعہ ۵۶۰ کے سلسلہ انفراجی ہے اور جب لا بڑا ی سے ہے تو بدرجۂ اولیٰ سلسلہ انفراجی ہوگا

(۱۹۰) $\frac{1}{1-لا-لا^2+لا^3} = \frac{1}{2(لا-1)(1-لا)(1+لا)}$ پس اسلئے جملہ کی لوکارثم

$= -2$ لوک $(1-لا)$ – لوک $(1+لا) = 2\left(لا+\frac{لا^2}{2}+\frac{لا^3}{3}+\cdots\right)-\left(لا-\frac{لا^2}{2}+\frac{لا^3}{3}-\cdots\right)$

اس سے معلوم ہوا کہ اگر ن جفت ہو تو $لا^{ن}$ کا سر ن ہے اور اگر ن طاق ہو تو $لا^{ن}$ کا سر $\frac{3}{ن}$ ہے

(۱۹۱) $1+2لا^2+لا^4 = 2د لا(1-لا^2)$ اسکو $لا^2$ پر تقسیم کرو تو $\frac{1}{لا^2}+2+لا^2 = 2د\left(\frac{1}{لا}-لا\right)$ یعنے $\left(لا-\frac{1}{لا}\right)^2+2د\left(لا-\frac{1}{لا}\right)+4=0$ اس دوم درجہ کی مساوات حل کرنے سے $لا-\frac{1}{لا} = -د+\sqrt{د^2-4}$ اس سے لا دریافت ہو سکتا ہے

(۱۹۲) اگر لا = ء = ی تو جملہ فنا ہو جاتا ہے اگر لا = ء تو جملہ $ی^2(ی-لا)^2$ ہو جاتا ہے اور علےٰ ہذا القیاس اگر ء = ی یا ی = لا ہو تو یہ جملہ ضرور مثبت ہوگا۔ اگر لا اور ء اور ی مختلف ہوں اور اونمیں مقدار کے اعتبار سے ترتیب تنازلی جبریہ ہو یعنی لا – ء اور ء – ی مثبت ہوں تو $لا^2(لا-ء)(لا-ی)$ مثبت ہے اور $ی^2(ی-لا)(ی-ء)$ مثبت ہے کیونکہ اجزاء ضربی ی – ء اور ی – لا دونو منفی ہیں لیکن $ء^2(ء-ی)(ء-لا)$ منفی ہے اب کیا تو $لا^2$ یا $ی^2$ بڑا $ء^2$ سے ہے اور لا – ی بڑا لا – ء سے ہے اور ء – ی سے زیادہ تر بڑا ہے پس کم از کم ایک دونو $لا^2(لا-ی)(لا-ی)$ اور $ی^2(ی-لا)(ی-ء)$ میں سے کمیت کی اعتبار سے بڑا $ء^2(ء-ی)(ء-لا)$ سے ہوگا پس کل جملہ مثبت ہے

(۱۹۳) مساواتوں کو اس طرح لکھو کہ

(لا۲+۱) (ی۲+۱) = ۴م لا ی اور ن۲ (لا۲+۱) ی = لا (ی۲+۱) پس ضرب دیکر ن۲ (لا۲+۱)۲ (ی۲+۱) ی = ۴م لا۲ ی (ی۲+۱) پس یہہ حل کہ ی = ۰ مساوات سے متعلق نہیں ہوسکتا ی۲+۱ = ۰ سے ناممکن قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اب ن۲ (لا۲+۱) = ۴م لا۲ مقرر کرو تو لا۲+۱ = ± ۲م لا/ن اسے ہم لا کو دریافت کرتے ہیں اور چونکہ (لا۲+۱) (ی۲+۱) = ۴م لا ی تو قیمت مندرج کرنے سے ± ۲م/ن (ی۲+۱) = ۴م ی اسیواسطے ی۲+۱ = ± ۲ن ی اس سے ہم ی کو دریافت کرتے ہیں

(۱۹۴) فرض کرو لا = ک (۱−ب و) اور ی = ک (۱+د و) اور ی = ک (۱+اب و۲) اور انکو ہر ایک مساوات میں مندرج کرو تو اول مساوات ک (۱+ب+ح+اب ح و۲) = ۰ اور دوسرے کا (۱+اب و۲) (۱+ب+ح+اب ح و۲) = ۰ اسے معلوم ہوا کہ دونو مساواتوں کی شرائط پوری ہوجائینگی اگر ۱+ب+ح+اب ح و۲ = ۰ ہو

(۱۹۵) م وان مجموعہ (م−۱) ق+۱ وین رقم سے اس سلسلہ حسابیہ کے جو سلسلہ متوقعہ سے اخذ کیا جائے شروع ہوتا ہے یعنے وہ ا/ق۲ − ب/۲ق + ب/۲ق۲ + (م−۱) ق . ب/ق۲ سے شروع ہوتا ہے پس مجموعہ رقموں کا مجموعوں میں یہہ ہے

ق/۲ [۲ا/ق۲ − ب/ق + ب/ق۲ + ۲(م−۱) ب/ق + ق−۱ ب/ق۲] یعنے

ق/۲ [۲ا/ق + ۲(م−۱) ب/ق] یعنی ا + (م−۱) ب ہے

(۱۹۶) فرض کرو کہ ن وین رقم کو سن تعبیر کرتا ہے تو سن = ½ (سن−۱ + سن−۲) اسیواسطے سن − سن−۱ = −½ (سن−۱ − سن−۲) اسے ثابت ہوتا ہے کہ سلسلہ س۲ − س۱ اور س۳ − س۲ اور س۴ − س۳ ... ایک سلسلہ ہندسیہ ہے جسکی نسبت مشترک −½ ہے

اسیواسطے سن − سن−۱ = (س۲ − س۱) (−½)ن−۲ = (ب − ا) (−½)ن−۲ پس

س۲ − س۱ = ب − ا اور س۳ − س۲ = (ب − ا) (−½) اور س۴ − س۳ = (ب − ا) (−½)۲

... سن − سن−۱ = (ب − ا) (−½)ن−۲ اسیواسطے جمع کرنے سے

$$\text{س}_{\text{ن}} - \text{س}_{۲} = (\text{ب} - \text{ا})\left[۱ + \left(-\frac{۱}{۲}\right) + \left(-\frac{۱}{۲}\right)^{۲} + \dots + \left(-\frac{۱}{۲}\right)^{\text{ن}-۲}\right]$$

$$= (\text{ب} - \text{ا})\frac{۱ - \left(-\frac{۱}{۲}\right)^{\text{ن}-۱}}{۱ - \left(-\frac{۱}{۲}\right)} = \frac{۲(\text{ب}-\text{ا})}{۳}\left[۱ - \left(-\frac{۱}{۲}\right)^{\text{ن}-۱}\right]$$

(۱۹۷) اول دو چیزین ا اور ب فرض کرو تو انکی ترتیبین اب اور ب ا ہین اسے ہم $\frac{۱}{\text{ا}(\text{ا}+\text{ب})}$ اور $\frac{۱}{\text{ب}(\text{ا}+\text{ب})}$ کسرین بناتے ہین اونکا مجموعہ $= \left(\frac{۱}{\text{ا}} + \frac{۱}{\text{ب}}\right)\frac{۱}{\text{ا}+\text{ب}} = \frac{۱}{\text{ا ب}}$

اب تین جزا اور ب اور ج فرض کرو تو وہ ترتیبین جنمین ج آخر ہوتا ہے اب ج اور ب ا ج ہین اسے ہم $\frac{۱}{\text{ا}(\text{ا}+\text{ب})(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})}$ ، $\frac{۱}{\text{ب}(\text{ب}+\text{ا})(\text{ب}+\text{ا}+\text{ج})}$ بنائین تو انکا مجموعہ بموجب صورت اول $\frac{۱}{\text{ا ب}(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})}$ ہے اور اسی طرح سے اون ترتیبون مین جنکے آخر ا ہے $\frac{۱}{\text{ب ج}(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})}$ حاصل ہوگا اور جن ترتیبون کے آخر مین ب ہے اوسے $\frac{۱}{\text{ج ا}(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})}$ حاصل ہو پس کل مجموعہ

$$= \frac{۱}{\text{ا}+\text{ب}+\text{ج}}\left(\frac{۱}{\text{ا ب}} + \frac{۱}{\text{ب ج}} + \frac{۱}{\text{ج ا}}\right) = \frac{۱}{\text{ا ب ج}}$$

پس جو امر تین جزون کے واسطے ثابت ہوا وہی چار جزون کے لئے ثابت ہو سکتا ہے اور علے ہذا القیاس

(۱۹۸) دائین طرف جو جملہ ہے وہ ظاہر ہے کہ $(۱+\text{ی})^{\text{ن}}\left(۱+\frac{\text{لا}}{\text{ی}}\right)^{\text{ن}}$ کی صورت مفصل مین وہ رقم ہے جسمین ی نہین ہے اور $(۱+\text{ی})^{\text{ن}}\left(۱+\frac{\text{لا}}{\text{ی}}\right)^{\text{ن}} =$

$$\left(۱+\text{لا}+\text{ی}+\frac{\text{لا}}{\text{ی}}\right)^{\text{ن}} = (۱+\text{لا})^{\text{ن}}\left[۱+\frac{\text{ی}+\frac{\text{لا}}{\text{ی}}}{۱+\text{لا}}\right]^{\text{ن}} =$$

$$(۱+\text{لا})^{\text{ن}}\left[۱ + \text{ن ی} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲}\text{ی}^{۲} + \dots\right]$$

اسمین ی بجای $\frac{\text{ی}+\frac{\text{لا}}{\text{ی}}}{۱+\text{لا}}$ کے ہے

اب ہمکو وہ رقم دریافت کرنی چاہیئے جو ی اور $\text{ی}^{۲}$ اور $\text{ی}^{۳}$ . . . کی صورت مفصلہ مین ی نہ رکھتی ہو اب یہان ہم دیکھتے ہین کہ ی اور $\text{ی}^{۳}$ اور $\text{ی}^{۵}$ . . . مین تو کوئی ایسی رقم موجود نہین اور $\text{ی}^{۲}$ مین $\frac{۲\text{لا}}{(۱+\text{لا})^{۲}}$ ہے اور $\text{ی}^{۴}$ مین رقم $\frac{\underline{|۴}}{\underline{|۲}\ \underline{|۲}\ (۱+\text{لا})^{۴}}$ ہے اور علیٰ ہذا القیاس

(۱۹۹) $\text{س}_{\text{ن}} = \frac{۱}{\text{و}_{\text{ن}+۱}}$ جسمین $\text{و}_{\text{ن}} = \left(\frac{\text{ن}+۲}{\text{ن}+۱}\right)^{\text{ن}+۱} - \frac{\text{ن}+۲}{\text{ن}+۱} =$

$\left(۱+\frac{۱}{\text{ن}+۱}\right)^{\text{ن}+۱} - \frac{\text{ن}+۲}{\text{ن}+۱}$ اسے معلوم ہوا کہ جب ن کو کما ینبغی بڑا فرض کرین تو

جہاں تک ہم چاہیں ون کو تقریباً برابری -۱ کے کرسکتے ہیں اس سے
معلوم ہوا کہ ہم سن کو برابر $(\frac{1}{1-ہی})^{ن+1}$ کے کرسکتے ہین پس جب ن
کا نہایت بڑا ہووے اور $\frac{1}{1-ہی}$ چھوٹا واحد سے ہو تو سلسلہ سلسلہ ہندسیہ بنجائیگا
جسمین نسبت مشترک واحد سے کم ہوگی اور اسیواسطے وہ انضمامی ہوگا

(۲۰۰) دفعہ ۲۵۰ کی ترکیب کے موافق سلسلہ برابر ہے حاصلضرب $\underline{|ن+۳}$ اور $لا^{ن+۳}$ کے سر کے جو صورت مفصلہ

$$\left(لا + \frac{لا^2}{\underline{|2}} + \frac{لا^3}{\underline{|3}} + \frac{لا^4}{\underline{|4}} + \cdots\right)^ن$$

مین واقع ہے اور یہہ سر وہی ہے جو $لا^3$ کا سر صورت مفصلہ

$$\left(1 + \frac{لا}{\underline{|2}} + \frac{لا^2}{\underline{|3}} + \frac{لا^3}{\underline{|4}} + \cdots\right)^ن$$ مین واقع ہے

اور بموجب دفعہ ۲۹۵ کے

ع	ق	ر	ص
ن-۱	۰	۰	۱
ن-۲	۱	۱	۰
ن-۳	۳	۰	۰

ق + ۲ر + ۳ص = ۳

اور ع + ق + ر + ص = ن پس سر

$$ن\,\frac{1}{\underline{|4}} + ن(ن-1)\,\frac{1}{\underline{|2}}\cdot\frac{1}{\underline{|3}} + \frac{ن(ن-1)(ن-2)}{\underline{|3}}\left(\frac{1}{\underline{|2}}\right)^3$$

یعنی $\frac{ن}{24} + \frac{ن(ن-1)}{12} + \frac{ن(ن-1)(ن-2)}{48}$

اسیواسطے سلسلہ $= \underline{|ن+۳}\left[\frac{ن}{24} + \frac{ن(ن-1)}{12} + \frac{ن(ن-1)(ن-2)}{48}\right]$

(۲۰۱) اگر ضرب کا عمل اون اجزاء ضربی پر کرین جو اول مثال مین بیان ہوئی تو
یہہ حاصل ہوگا کہ

$1 - لا - لا^2 + لا^{[illegible]} + لا^{[illegible]} + لا^{[illegible]} - لا^{[illegible]} - لا^{[illegible]} - لا^{[illegible]} - لا^{[illegible]} + لا^{[illegible]} + لا^{[illegible]} - لا^{[illegible]}$ اب اگر ہم
$(1-لا^{[illegible]})(1-لا^{[illegible]})(1-لا^{[illegible]})\cdots$ کو اسمین ضرب دین تو ظاہر ہے کہ حاصل ضرب
$لا^{۱۲}$ تک یہہ ہوگا کہ $1 - لا^{[illegible]} - لا^{[illegible]} - لا^{[illegible]} - لا^{[illegible]} - لا^{[illegible]} - لا^{[illegible]} - لا^{۱۲}$ اب اس کو پہلے
حاصل ضرب مین ضرب دین اور $لا^{۱۲}$ تک حاصل ضرب لکھین تو یہہ ہوگا کہ

۱ − لا − لا^{۲} + لا^{۵} + لا^{۶} − لا^{۱۲}

(۲۰۲) ضرب دینے یا دفعہ ۸۰۸ کی ترتیب سے بہ آسانی ثابت ہوسکتا ہے کہ

(ا − ب)^{۳} + (ب − ج)^{۳} + (ج − ا)^{۳} = − ۳ (ب − ا) (ج − ب) (ا − ج)

اسے معلوم ہوا کہ

(ا^{۲} − ب^{۲})^{۳} + (ب^{۲} − ج^{۲})^{۳} + (ج^{۲} − ا^{۲})^{۳} = − ۳ (ب^{۲} − ا^{۲}) (ج^{۲} − ب^{۲}) (ا^{۲} − ج^{۲})

دوسرے کو اول پر تقسیم کرو تو نتیجہ مطلوب حاصل ہوجائیگا

(۲۰۳) اب ہم کو یہہ ثابت کرنا ہے کہ ر^{۱۰۰} چھوٹی بہ نسبت ۵۰ کے ہے اور ر = ۱ + $\frac{۴}{۱۰۰}$

اب لوک ر^{۱۰۰} = ۱۰۰ لوک ر = ۱۰۰ لوک $\frac{۱۰۴}{۱۰۰}$ = ۱۰۰ (لوک ۱۰۴ − ۲)

= ۱۰۰ (لوک ۱۳ + لوک ۸ − ۲) = ۱۰۰ (لوک ۱۳ + ۳ لوک ۲ − ۲) = ۱٫۷۰۳۳

اور نیز لوک ۵۰ = لوک $\frac{۱۰۰}{۲}$ = ۲ − لوک ۲ = ۱٫۶۹۸۹۷ پس

لوک ر^{۱۰۰} بڑی بہ نسبت لوک ۵۰ کے ہے اسواسطی ر^{۱۰۰} بڑا ۵۰ سے ہے

(۲۰۴) فرض کرو کہ کسر متسلسل $\frac{۱}{۱+}$ $\frac{۱}{ع+}$ $\frac{۱}{۱+}$ $\frac{۱}{ع+}$ ... کو لا تعبیر کرتا ہے تو

لا = $\frac{۱}{۱ + \frac{۱}{ع + لا}}$ = $\frac{ع + لا}{ع + ۱ + لا}$ اسواسطی لا^{۲} + ع لا − ع = ۰

اسواسطے لا = $\frac{۱}{۲}$ (− ع + $\sqrt{ع^{۲} + ۴ع}$) اسواسطی ۲لا + ع = $\sqrt{ع^{۲} + ۴ع}$

یہی نتیجہ مطلوب ہے

(۲۰۵) فرض کرو کہ ۹ پونڈ کے وزنون کو لا تعبیر کرتا ہے اور ۱۴ پونڈ کے وزنون کو ی تعبیر کرتا ہے تو ۹ لا + ۱۴ ی = ۲۲۴۰ ایک حل لا = ۰ اور ی = ۱۶۰

اور عام حل لا = ۱۴ ط اور ی = ۱۶۰ − ۹ ط اسمین ط کی قیمت صفر سے لیکر ۱۷ تک ہوسکتی ہے جسمین صفر اور ۱۷ بھی داخل ہین پس ۱۸ حل ہوئی

(۲۰۶) فرض کرو کہ $\frac{۱}{(۱ − لا)^{۲}(۱ − ۲لا)}$ = $\frac{ط}{۱ − ۲لا}$ + $\frac{ص لا + س}{(۱ − لا)^{۲}}$

اسواسطی ۱ = ط (۱ − لا)^{۲} + (ص لا + س) (۱ − ۲لا) چونکہ یہہ مساوات متطابقہ ہے

تو لا کی قیمت جو چاہیں فرض کر سکتے ہیں پس لا = ۱/۲ فرض کرو تو

۱ = ط/۴ پس ط = ۴ اسیواسطے ۱ - ۴ (۱ - لا)^۲ = (ص لا + س)(۱ - ۲ لا)

یعنے (۲ لا - ۳)(۱ - ۲ لا) = (ص لا + س)(۱ - ۲ لا) اسیواسطے

۲ لا - ۳ = ص لا + س اسیواسطے ص = ۲ اور س = -۳ پس

۱ / ((۱ - ۲ لا)(۱ - لا)^۲) = ۴ / (۱ - ۲ لا) + (۲ لا - ۳) / (۱ - لا)^۲ = ۴ (۱ - ۲ لا)^{-۱} + (۲ لا - ۳)(۱ - لا)^{-۲}

پس لا^ن کا سر صورت منفصلہ مین ۴ ہوگا ۲^ن + ۲ ن - ۳ (ن + ۱) یعنی ۲^{ن+۲} - ن - ۳ ہے

(۲۰۷) دونو مفروضہ جملون کو ۱ - لا پر تقسیم کرو تو ہمکو یہہ ثابت کرنا ہے کہ

(۱ + لا + لا^۲ + ... + لا^ن) / (ن + ۱) چھوٹا (۱ + لا + لا^۲ + ... + لا^{ن+۱}) / ن سے ہے

یا ن لا^{ن+۱} چھوٹی ۱ + لا + لا^۲ + ... + لا^ن سے ہے اور یہہ ظاہر ہے کہ

ن رقمون مین سے ہریک رقم بائین طرف بڑی لا^{ن+۱} سے ہے

(۲۰۸) یہہ ظاہر ہے کہ جملہ ن^۴ - ۴ ن^۳ + ۵ ن^۲ - ۲ ن مین ن = ۱ ہو تو وہ

فنا ہو جاتا ہے اسلئے بموجب دفعہ ۳۳۲ کے ایک جز ضربی اوسکا ن - ۱ ہے اور

ن بھی ایک جز ضربی ہے پس جملہ کو ن (ن - ۱) پر تقسیم کرو تو ایک اور جز ضربی

دریافت ہوگا اور یہہ معلوم ہوگا کہ جملہ = (ن - ۲)(ن - ۱)^۲ ن اب ان مین

اجزاء ضربی ن - ۲ اور ن - ۱ اور ن مین سے ایک ۳ پر تقسیم ہوگا اور اگر ن جفت ہو

تو ن اور ن - ۲ لگا ۲ پر تقسیم ہوگا اور اگر ن طاق ہو تو (ن - ۱)^۲ چار پر

تقسیم ہوگا پس جملہ ۴ × ۳ یعنی ۱۲ پر تقسیم ہوتا ہے

(۲۰۹) جتنی طرح سے ۵ سکے نکالے جائینگے اونکی تعداد اون اجتماعون کی تعداد سے ہے جو

۱۰ چیزون مین سے پانچ پانچ کی لی جاویں یعنے ۱۰! / (۵! ۵!) اور جتنے طورون سے تین نشاندار سکے نکالے ہوئے سکون مین سے لئے جا سکتے ہین

اونکی تعداد یعنی ۷! / (۵! ۲!) ہے پس تین نشاندار سکون کے نکلنے کا احتمال

۷! / (۵! ۲!) ÷ ۱۰! / (۵! ۵!) یعنی (۵ × ۴ × ۳) / (۱۰ × ۹ × ۸) یعنی ۱/۱۲ ہے اسسے معلوم ہوا کہ توقع کی قیمت ۱/۱۲ روپیہ ہے

(۲۱۰) ن وین رقم $\frac{(ن-1)^{ن-1}}{ن^ن} = \frac{1}{ن-1}\left(\frac{ن-1}{ن}\right)^ن = \frac{1}{ن-1}\left(1-\frac{1}{ن}\right)^ن$ اب
$\left(1-\frac{1}{ن}\right)^ن$ کو جسقدر چاہیں $ی^{-1}$ کے قریب ن کو کما ینبغی بڑا فرض کرکے لا سکتے ہیں دفعہ
۵۵۲ دیکھو پس سلسلہ ایک نسبت محدود سلسلہ منفرجہ $\frac12+\frac13+\frac14+\dots$ سے رکھتا ہے
اسلئے وہ خود انفراجی ہے

(۲۱۱) فرض کرو کہ ن مقادیر کو $ا_1$ و $ا_2 \dots ا_ن$ لتعبیر کرتے ہیں تو

$$(ا_1+ا_2+\dots+ا_ن)^2 = \frac{2ن}{ن-1}(ا_1ا_2+ا_1ا_3+\dots+ا_2ا_3+\dots)$$

اب دائیں طرف مجذور کی تشریح لکھو اور ن - ا میں ضرب دو اور ساری رقمیں دائیں طرف لے آؤ تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$(ا_1-ا_2)^2+(ا_1-ا_3)^2+\dots+(ا_2-ا_3)^2+\dots = 0$$

اسیواسطے $ا_1-ا_2 = 0$ اور $ا_1-ا_3 = \dots ا_2-ا_3 = 0$

(۲۱۲) ب - ج کی جگہہ لا اور ج - ا کی جگہہ ی رکھو تو لا - ی = -(ا - ب)
پس اول جملہ کی یہہ صورت ہوگی کہ ۲۵ $[(لا+ی)^3-لا^3-ی^3][(لا+ی)^5-لا^5-ی^5]$
یعنی ۲۵ $(لا^2+لای+ی^2)^2$ ۷ لای(لا+ی) × ۳ لای(لا+ی) مثال ۴ باب ۵ دیکھو
اور دوسرا جملہ یہہ ہوجاے گا کہ ۲۱ $[(لا+ی)^5-لا^5-ی^5]^2$
یعنی ۲۱ $[5(لا+ی)(لا^2+لای+ی^2)لای]^2$

(۲۱۳) فرض کرو کہ اوسکی توقع زیست لا برسوں کی ہے تو بموجب دفعہ ۵۹۵ کے ہمکو
یہہ حاصل ہوتا ہے $1812\frac45 = 150\,\frac{1-ر^{-لا}}{ر-1}$ جسمیں $ر = 1+\frac{5}{100} = \frac{21}{20}$ اسیواسطے
$\frac{1}{20}\cdot\frac{1812\frac45}{150} = 1-ر^{-لا}$ اسیواسطے $ر^{-لا} = 1-\frac{9064}{15000} = \frac{5936}{15000}$
اسیواسطے $ر^{لا} = \frac{15000}{5936} = \frac{300000}{118720}$ پس لا لوگ $\frac{21}{20}$ = لوگ $\frac{300000}{118720}$
اسیواسطے $لا = \frac{\text{لوگ ۳} - \text{لوگ ۱۱۸۷۲} + ۱}{\text{لوگ ۳} + \text{لوگ ۷} - \text{لوگ ۲} - ۱} = \frac{0.4025974}{0.0211893}$ یعنے ٹھیک ۱۹ برس

(۲۱۴) $\frac{1+\sqrt5}{2} = 1+\frac{\sqrt5-1}{2} = 1+\frac{2}{1+\sqrt5}$ پس ہر ایک خارج قسمت واحد ہے
اسے معلوم ہوا کہ $ع_ر = ع_{ر-1}+ع_{ر-2}$ پس $ع_3 = ع_2 + ع_1$ اور

$ع_۴ = ع_۵ + ع_۴ \cdots ع_۲ = ع_{۲ن-۱} + ع_{۲ن-۲}$ اسواسطے ۱ جمع کرنے سے

$ع_{۲ن} = ع_۲ + ع_۳ + ع_۵ + ع_۷ + \cdots + ع_{۲ن-۱}$

۱۰ اسی طرح $ق_ر = ق_{ر-۱} + ق_{ر-۲}$ وغیرہ

(۲۱۵) فرضکرو کہ شمار کنندہ لا اور نسب نما ء ہے تو وہ لا + ۱۱ء = ۱۰۳۱ تقسیم پر کرو تو

$لا + ۲ء + \frac{ء-۱}{۵} = ۲۰۶$ اسواسطے $\frac{ء-۱}{۵}$ ایک صحیح ہونا چاہیئے فرض کرو کہ

وہ = ط پس ء = ۱ + ۵ط اور لا = ۲۰۴ - ۱۱ط چونکہ کسر واجب ہے تو چاہیئے

۱ + ۵ط بڑا ۲۰۴ - ۱۱ط سے ہو یا پہلے ط بڑا ۱۲ سے ہونا چاہیئے پس اس سے ثابت ہوا

کہ ط کی قیمت ۱۳ اور ۱۸ کے درمیان ہونی چاہیئے اور اسمین ۱۳ اور ۱۸ بھی داخل ہین

(۲۱۶) بموجب دفعہ ۲۸۴ کے ہم جانتے ہین کہ $\frac{|ن}{(لا+۱)(لا+۲)\cdots(لا+ن+۱)} =$

$\frac{ط_۱}{لا+۱} + \frac{ط_۲}{لا+۲} + \cdots \frac{ط_{ن+۱}}{لا+ن+۱}$ مساوات متطابقہ ہے اور

$ط_۱$ و $ط_۲$ ... $ط_{ن+۱}$ خاص مقادیر مستقلہ ہین اب کسر دور کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$|ن = ط_۱ (لا+۲)(لا+۳) \cdots (لا+ن+۱) + ط_۲ (لا+۱)(لا+۳) \cdots (لا+ن+۱)$

$+ ط_۳ (لا+۱)(لا+۲)(لا+۴) \cdots (لا+ن+۱) + \cdots$

اب چونکہ یہہ متطابقہ ہے اسلیئے وہ لا کی سب قیمتون کے موافق درست ہے بجای لا کی -۱ رکھو تو

بائین طرف سب رقمین فنا ہو جائینگی الا وہ جسمین $ط_۱$ ہے پس یہہ حاصل ہوگا کہ

$|ن = ط_۱ |ن$ یعنی $ط_۱ = ۱$ اور پہر متطابقہ مین -۲ بجای لا رکھو تو بائین طرف

ساری رقمین فنا ہو جائینگی الا وہ جسمین $ط_۲$ ہے پس یہہ حاصل ہوگا کہ $|ن = ط_۲ |ن-۱$

پس $ط_۲ = -ن$ اور اسیطرح $ط_۳ = \frac{ن(ن-۱)}{۲}$ اور علے ہذالقیاس یہہ مسئلہ

مثال ۲۳۶ کی طرح بہی استقراء سے ثابت ہوسکتا ہے

(۲۱۷) بجای ع کی $\frac{م}{ن}$ رکھو اسمین م اور ن مثبت صحاح ہین اب ہم کو یہہ ثابت کرنا ہے

کہ $(۱+ب)^{\frac{م}{ن}}$ چھوٹا ہے بہ نسبت $\frac{ن+م ب}{ن}$ کے ہی فرضکرو کہ م مقادیر مین جنمین

ہر ایک برابر ا + ب کی ہو اور ن ـ م مقادیر ہیں جنمیں سے ہر ایک برابر ا کے ہو تو اونکا اوسط حسابیہ $\frac{م(ا+ب)+(ن-م)ا}{ن}$ یعنی $\frac{ن ا + م ب}{ن}$ ہے اور اوسط ہندسیہ اونکا $[(ا+ب)^م ا^{ن-م}]^{\frac{1}{ن}}$ یعنی $(ا+ب)^{\frac{م}{ن}} ا^{\frac{ن-م}{ن}}$ ہے بموجب فقرہ ۲۸۱ کے دوسرا پہلے سے کم ہے

(۲۱۸) ہم دیکھتے ہیں کہ $۳^۴ - ۱ = ۸۱ - ۱ = ۸۰$ سے جواسطے $۳^{ن+۴} - ۳^ن = ۸۰ × ۳^ن$ پس اگر $۳^ن$ میں دہن کی مرتبہ پر ہندسہ جفت ہی تو $۳^{ن+۴}$ مین دہن کی مرتبہ پر ہندسہ جفت ہے لیکن اگر ن = ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ کے تو $۳^ن$ مین دہائی کی مرتبہ پر ہندسہ جفت ہی اسواسطے ن کی ہر ایک قیمت کی موافق ہندسہ جفت ہی ہوگا ـ اور ۹ کی کوئی قوت ۳ کی ہی قوت ہے اسلئے بیان مذکور ۹ کی قوتون پر بھی صادق آتا ہے ـ یہی بیان ۷ کی قواء پر بھی صادق آتا ہے اوسکا ثبوت اوسطرح ہوسکتا ہی جسطرح ۳ کی قواء کے لئے بیان ہوا یہان $۷^۴ - ۱ = ۲۴۰۰$ ہے خیال رکھو $۵^{ن+۱} - ۵^ن = ۵^ن(۵-۱) = ۲۰ × ۵^{ن-۱}$ پس اگر $۵^ن$ مین دہائی کی مرتبہ پر ہندسہ جفت ہی تو $۵^{ن+۱}$ مین بہی دہائی کی مرتبہ پر ہندسہ جفت ہوگا لیکن اگر ن = ۱ یا ۲ کے ہو تو $۵^ن$ مین دہائی کے مرتبہ پر ہندسہ جفت ہوتا ہے اسواسطے وہ ن کی ہر ایک قیمت کے موافق جفت ہوگا اور $۶^{ن+۱} - ۶^ن = ۶^ن(۶-۱) = ۳۰ × ۶^{ن-۱}$ اسلئے یہہ ثابت ہوتا ہے کہ $۶^ن$ مین دہائی کے مرتبہ پر ہندسہ طاق ہوگا خواہ ن کی کوئی قیمت فرض کرو

(۲۱۹) اب یہان تین فرض ممکن ہین اول یہہ کہ سب گولیان سیاہ ہون دوئم گولیان سپید ہون سوم ایک گولی سیاہ ہو اب پہلے مشاہدہ کرلے سی فرض کرو کہ ان تینون فرضون کے احتمال برابر ہئے تو بعد مشاہدہ کے اول فرض کا احتمال ۱ ÷ $[۱ + \frac{۸}{۲۷} + \frac{۱}{۲۷}]$ یعنی $\frac{۲۷}{۳۶}$ ہے

(۲۲۰) بموجب فقرہ ۲۹۴ کے کسر متسلسل $۲ + \frac{۱}{۲+} \frac{۱}{۲+} \cdots = \sqrt{۲+۱}$

پس لا = $\sqrt{۲+۱}$ اور بموجب فقرہ ۲۹۵ کے کسر متسلسل لا ـ $\frac{۱}{۲لا-} \frac{۱}{۲لا-} = \sqrt{لا^۲ - ۱}$

(۲۲۵) موافق دفعہ ۲۳۴ کے جملہ مفروضہ برابر ۲ (لا − سہ) (لا − صہ) جسمین سہ اور صہ

مساوات ۲ لا۲ − (۲۱ ی + ۱) لا − ۱۱ ی۲ + ۳۴ ی − ۳ = ۰

کی قیمتین ہین اور یہہ قیمتین $\frac{۲۱ ی + ۱ \pm \sqrt{۸ (۲۳ ی - ۵)}}{۴}$ یعنی ۱۱ ی − ۱ اور − ی/۲ + ۳/۲

ہین پس جملہ مفروضہ

= ۲ (لا − ۱۱ ی + ۱) (لا + ی/۲ − ۳/۲) = (لا − ۱۱ ی + ۱) (۲ لا + ی − ۳)

(۲۲۶) بموجب دفعہ ۲۵۸ کسلسلہ دورکی تحویل والیسے ہندسیہ سلسلون مین ہو سکتے ہے جنمین

ایک جملہ $\frac{ط}{سہ - لا}$ سے اور دوسرا جملہ $\frac{ص}{صہ - لا}$ سے پیدا ہو جسمین ط اور ص مقادیر مستقل ہین

اور سہ اور صہ مساوات ۱ − ع لا − ق لا۲ = ۰ کی قیمتین ہین اب ان دونون

سلسلون کے انضمامی ہونے کے لئے ضرور ہے کہ لا چہوٹا دونو سہ اور صہ سے ہون

(۲۲۷) $\frac{ع_۱ ا_۱ + ع_۲ ا_۲ + \cdots + ع_ن ا_ن}{ع_۱ + ع_۲ + \cdots + ع_ن}$ بڑا

$\left(\frac{ع_۱ ا_۱ + ع_۲ ا_۲ + \cdots + ع_ن ا_ن}{ع_۱ + ع_۲ + \cdots + ع_ن}\right)^۲$ سے ہے اسواسطے اگر کسور کو دور کرین

اور تمام رقمون کو دائین طرف لے آئین توہمکو یہہ سلسلہ مثبت مقادیر کا حاصل ہوگا کہ

ع۱ ع۲ (ا۱ − ا۲)۲ + ع۱ ع۳ (ا۱ − ا۳)۲ + ۰۰۰ اور $\frac{ع_۱ ا_۱ + ع_۲ ا_۲ + \cdots + ع_ن ا_ن}{ع_۱ + ع_۲ + \cdots + ع_ن}$

بڑا $\frac{ا_۱ + ا_۲ + \cdots + ا_ن}{ن}$ سے ہے اسواسطے کہ اگر ہم کسور کو دور کرین اور سب رقمون کو

دائین طرف لے آئین تو ہم کو یہہ سلسلہ مثبت مقادیر کا حاصل ہوگا کہ

(ع۱ − ع۲) (ا۱ − ا۲) + (ع۱ − ع۳) (ا۱ − ا۳) + ۰۰۰ اسی نتیجہ مطلوب حاصل ہے

(۲۲۸) ہم فرض کر سکتے ہین کہ ا = ۵ ع + سہ اور ب = ۵ ق + صہ اور ج = ۵ ر + لر

جس مین ع اور ق اور ر صحاح ہین اور سہ اور صہ اور لر تعبیر کرتے ہین

۰ یا ± ۱ یا ± ۲ کو پس

(۵ ع + سہ)۲ + (۵ ق + صہ)۲ = (۵ ر + لر)۲

اسیواسطے لر۲ + صہ۲ - سہ۲ کیا تو صفر ہے یا ۵ پر تقسیم ہوتا ہے اب سہ۲ و صہ۲ و لر۲
چاہیئے کہ صفر ہو یا ایا ۴ اور امتحان کرنے سے یہہ ناممکن معلوم ہوتا ہے کہ لر۲ - صہ۲ - سہ۲
برابر صفر کے ہو یا ۵ پر پورا تقسیم ہوتا ہو اگر سہ و صہ و لر مین ایک صفر نہ ہو پس اسی ثابت ہوا
کہ ا اور ب اور ح مین ایک پورا ۵ پر تقسیم ہوتا ہے

(۲۲۹) تمثیلاً فرض کرو کہ ۴ ہندسون کا عدد لکہا تہا تو وہ عدد یقینی ۹۹۹۹ اور ۱۰۰۰ کے
درمیان واقع ہوگا اور اسمین یہہ دونو بہی شامل ہین اب ۹۹۹۹ سے شروع کرین اور
۱۰۰۰ پر ختم کرین تو ہم دیکہتے ہین کہ نو عدد دون مین سے ایک عدد ایسا اتا ہے کہ پورا و پر تقسیم ہوتا ہے

(۲۳۰) اون خاص صورتون مین کہ ن = ۱ اور ن = ۲ کا دعوی ثابت ہے اور استقراء
سے وہ علی العموم ثابت ہوگا اسواسطے

لرن + دن = (لر + د) (لرن-۱ + دن-۱) - لر د (لرن-۲ + دن-۲)

فرض کرو کہ لر = ۳ + √۵ اور د = ۳ - √۵ تو لرن + دن ایک صحیح عدد ہوگا جو لرن
کے مابعد بڑا لگا (دفعہ ۵۲۶ دیکہو) اب لر + د تقسیم ۲ پر ہوتا ہے
اور لر د = ۴ پس اگر لرن-۱ + دن-۱ تقسیم ۲ن-۱ پر اور لرن-۲ + دن-۲ تقسیم
۲ن-۲ پر پورا ہوتا ہے تو لرن + دن پورا ۲ن پر تقسیم ہوتا ہے

(۲۳۱) فرض کرو کہ لر۲ + سہ لر + صہ مشترک جزضربی درجہ دوم کو تعبیر کرتا ہے اور
لر۳ + ع لر۲ + ق لر + ر = (لر۲ + سہ لر + صہ) (لر + لر) اور
لر۳ + عَ لر۲ + قَ لر + رَ = (لر۲ + سہ لر + صہ) (لر + لرَ)
تو ان متطابقون مین سرون کے برابر لکہنے سے یہہ حاصل ہوگا کہ
ع = سہ + لر اور ق = سہ لر + صہ اور ر = صہ لر
عَ = سہ + لرَ اور قَ = سہ لرَ + صہ اور رَ = صہ لرَ
اس سے معلوم ہوا کہ ع - عَ = لر - لرَ اور ق - قَ = سہ (لر - لرَ) اور ر - رَ = صہ (لر - لرَ)

۱۰ لا + ی ہوگا اسنے معلوم ہوا کہ ۱۰ ی + لا = $\frac{1}{2}$ (۱۰ لا + ی) − ۱ اسیواسطے

۱۹ ی − ۸ لا + ۲ = ۰ بتقسیم ۸ پر کرو تو ۲ ی − لا + $\frac{3ی+2}{8}$ = ۰

اسیواسطے $\frac{3ی+2}{8}$ ایک صحیح عدد ہونا چاہیئے اسکو = ص فرض کرو تو ۳ ی + ۲ = ۸ ص

۳ پر تقسیم کرو تو ی = ۲ ص + $\frac{2(ص-1)}{3}$ اسواسطے $\frac{ص-1}{3}$ صحیح عدد ہونا چاہیئے

اسکو = ط فرض کرو تو ص = ۳ ط + ۱ اسیواسطے ی = ۸ ط + ۲ اور لا = ۱۹ ط + ۵

چونکہ لا اور ی دونو ۱۰ سے کم ہونی چاہیئے اسلئے جو حل یہاں داخل رکہتا ہے فقط

لا = ۵ اور ی = ۲ ہے

(۲۳۶) یہہ استقراء سے ثابت ہوسکتا ہی جب ن = انو خواہ لا کی قیمت کچہہ ہی ہو مگر نہ لا + ۱ اور نہ لا + ۲ فنا ہوتا ہو تو ثبوت ظاہر ہے فرض کرلو کہ ن کی کسی قیمت کے موافق بشرطیکہ لسنبۃً فنا نہ ہوتا ہو دعویٰ ثابت ہے لا کو لا + ۱ سے تبدیل کرو اور فرض کرلو کہ لا + ن + ۲ فنا نہیں ہوتا تو

$$\frac{1}{لا+1}-\frac{ن}{(لا+1)(لا+2)}+\frac{ن(ن-1)}{(لا+1)(لا+2)(لا+3)}-\cdots=\frac{1}{لا+ن+1}\quad\text{اور}$$

$$\frac{1}{لا+2}-\frac{ن}{(لا+2)(لا+3)}+\frac{ن(ن-1)}{(لا+2)(لا+3)(لا+4)}-\cdots=\frac{1}{لا+ن+1}$$

دوسرے نتیجے کو اول نتیجے سے تفریق کرو تو

$$\frac{1}{(لا+1)(لا+2)}-\frac{2ن}{(لا+1)(لا+2)(لا+3)}+\frac{3ن(ن-1)}{(لا+1)\cdots(لا+4)}-\cdots=\frac{1}{لا+ن+1}-\frac{1}{لا+ن+2}$$

پہر اسکو اول نتیجے مین سے تفریق کرو تو

$$\frac{1}{لا+1}-\frac{ن+1}{(لا+1)(لا+2)}+\frac{(ن+1)ن}{(لا+1)(لا+2)(لا+3)}-\cdots=\frac{1}{لا+ن+2}$$

یہہ وہی ہے جو ہمنے اول نتیجہ مین ن کو ن + ۱ سے بدلنے مین حاصل کرتے پس اگر مسئلہ ن کی کسی خاص قیمت کے موافق درست ہے تو وہ اوسکی قیمت مابعد کے موافق بہی درست ہے اور وہ ن = ۱ کی حالت مین درست ہی تو وہ علی العموم درست ہوا

یہہ مسئلہ ۲۱۲ مثال کی طرح بہی ثابت ہوسکتا ہی کیونکہ یہہ ہم فرض کرسکتے مین کہ داہنی طرف جو جملہ ہے

۵۵ بطور مستطابقہ برابر

$\frac{ط_۱}{ل+۱} + \frac{ط_۲}{ل+۲} + \cdots + \frac{ط_{ن+۱}}{ل+ن+۱}$ جسمین $ط_۱$ اور $ط_۲$ اور $ط_۳$ ۔۔۔ $ط_{ن+۱}$

مستقل مقادیر ہین

(۲۳۷) ہمکو یہہ ثابت کرنا ہے کہ $ل^ن - ۱$ بڑی ہے $ن (ل-۱) ل^{\frac{ن-۱}{۲}}$ سے ہر $ل-۱$ پر تقسیم کرو تو

ہمکو یہہ ثابت کرنا ہوگا کہ $\frac{ل^{ن-۱} + ل^{ن-۲} + \cdots + ۱}{ن}$ بڑا $ل^{\frac{ن-۱}{۲}}$ سے ہر اب داہنے طرف کا رکن

ن مقادیر کا وسط حسابیہ ہے اور بائین طرف کا رکن انہین مقادیر کا وسط ہندسیہ ہے اور

بموجب دفعہ ۱۸۱ کے اول بڑا ہے

(۲۳۸) چھوٹی قوتون مین تو مشاہدہ سے دعوی ثابت ہوتا ہے اور بڑی قوتون مین ایسے طرح سے

اسواسطی کہ $۴^۴ - ۴ = ۶۰$ اور $۴^{ن+۴} - ۴^ن = ۶۰ \times ۴^{ن-۱}$ پس $۴^{ن+۴}$ مین

دہائی کے مرتبہ مین ہندسہ جفت ہوگا اگر $۴^ن$ مین جفت ہے اور اگر طاق ہے تو طاق ہوگا

اور $۲^۵ - ۲ = ۳۰$ پس $۲^{ن+۴} - ۲^ن = ۳۰ \times ۲^{ن-۱}$ پس $۲^{ن+۴}$ مین دہائی کے

مرتبہ پر ہندسہ جفت ہوگا اگر $۲^ن$ مین جفت ہوگا اور اگر طاق ہے تو طاق ہوگا اب ہم

فرض کرتے ہین ن کم ۴ سے نہین ہے

اور $۸^۵ - ۸ = ۳۲۷۶۰$ پس $۸^{ن+۴} - ۸^ن = ۳۲۷۶۰ \times ۸^{ن-۱}$ اسیواسطی

$۸^{ن+۴}$ مین دہائی کے مرتبہ پر ہندسہ جفت ہے اگر $۸^ن$ مین جفت ہے اور اگر طاق ہے تو طاق ہوگا

(۲۳۹) اب یہہ احتمال کہ ہندسہ ۲ ہے $\frac{۱}{۸}$ ہے اور اگر ہندسہ ۲ ہے تو یہہ احتمال کہ اوسکے

قوا مین دہائی کے مرتبہ پر ہندسہ طاق ہو $\frac{۱}{۲}$ ہے پس ۲ سے متعلق تو احتمال $\frac{۱}{۱۶}$

اور اسی طرح کا احتمال ۴ و ۸ سے متعلق $\frac{۱}{۱۶}$ ہے اور بموجب مثال ۲۱۸ کی ۶ سے متعلق

احتمال $\frac{۱}{۸}$ ہے اور مثال ۲۱۸ کے موافق ۔ اور ۳ و ۵ و ۷ و ۹ مین سی ہر ایک

سے متعلق احتمال صفر ہے پس کل احتمال $\frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۸}$ یعنی $\frac{۵}{۱۶}$ ہے

(۲۴۰) یہان $س_ن = ن^۳ + ۳ن^۲ + ۲ن = (ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)$ اور $\frac{س_ن}{ن+۱} = \frac{(ن+۴)(ن^۲ + ۳ن + ۲)}{(ن+۱)[(ن+۱)^۲ + ۳(ن+۱) + ۲]}$

$$= \frac{(ن+۴)(۲ن^۲+۳ن+۲)}{(ن+۱)(۲ن^۲+۷ن+۷)} = \frac{۲ن^۳+۱۱ن^۲+۱۴ن+۸}{۲ن^۳+۹ن^۲+۱۴ن+۷}$$

$$= \frac{ن^۳+\frac{۱۱}{۲}ن^۲+۷ن+۴}{ن^۳+\frac{۹}{۲}ن^۲+۷ن+\frac{۷}{۲}}$$

اب بموجب دفعہ ۷۷۶ کے طریقہ کتابت کر $ا - ط - ۱ = ۱$. پس سلسلہ انفراجی ہے

یا ہم اسطرح عمل کرین کہ دفعہ ۷۴۶ کی ترتیب کے موافق

$$\frac{۲ن^۲+۳ن+۲}{(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{ن+۱} - \frac{۱}{ن+۲} + \frac{۱۱}{ن+۳}\right)$$

اب اگر ہر یک رقم کی صورت بدلین تو یہہ معلوم ہوگا کہ سلسلہ مفروض

$$= \frac{۱۱}{۱۲} + ۲\left(\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} + \cdots + \frac{۱}{ن} + \cdots\right)$$

اسیواسطے بموجب دفعہ ۶۲۴ کے سلسلہ انفراجی ہوگا

(۲۴۱) یہان $ا_۲ = \frac{۱}{۲}(ا_۱ + ب_۱)$ اور $ب_۲ = \frac{۲ا_۱ب_۱}{ا_۱+ب_۱}$ اسیواسطے

$ا_۲ب_۲ = ا_۱ب_۱$ پس دعوی ثابت ہے جب ن = ۲ اب ہم اوسکو استقرا سے ثابت کرینگے

کہ وہ علی العموم ثابت ہے فرض کرو کہ ن کی کسی قیمت کے موافق $ا_نب_ن = ا_۱ب_۱$ اب

$ا_{ن+۱} = \frac{۱}{۲}(ا_ن + ب_ن)$ اور $ب_{ن+۱} = \frac{۲ا_نب_ن}{ا_ن+ب_ن}$ اسیواسطے

$$ا_{ن+۱}ب_{ن+۱} = \frac{ا_ن+ب_ن}{۲} \cdot \frac{۲ا_نب_ن}{ا_ن+ب_ن} = ا_نب_ن = ا_۱ب_۱$$

اس سے ثابت ہوا کہ اگر یہہ مسئلہ ن کی کسی خاص قیمت کے واسطے درست ہو تو وہ اوسکی

صورت مابعد کی حالت مین درست ہے اور چونکہ مسئلہ ن = ۲ کی صورت مین درست ہے

اسلئے وہ علے العموم درست ہے

(۲۴۲) اول اور دوم مساواتون کو جمع کرو تو $لا^۲ + ج^۲ - د^۲ - ب^۲ = ۲لا ی$ اسیواسطے

$لا - ی = \pm \sqrt{د^۲ + ب^۲}$ اور اسیطرح $ی - ی = \pm \sqrt{ب^۲ + ج^۲}$ اور $ی - لا = \pm \sqrt{د^۲ + ج^۲}$

اسیواسطے جمع کرنے سے ہمکو یہہ معلوم ہوتا ہے کہ مساواتین غیر مطابق ہین

اگر $\pm \sqrt{د^۲ + ب^۲} \pm \sqrt{ب^۲ + ج^۲} \pm \sqrt{د^۲ + ج^۲} = ۰$

نہو اب اگر یہہ ارتباط ہو تو تینون معلوم مساواتین دو مساواتون کے برابر ہوجاتی ہین

(۲۴۶) اگر دائین طرف ہر رقم کی صورت مفصلہ لکہی جائے تو $\text{لا}^{\text{ر}}$ کا سر یہہ دریافت ہوگا کہ

$$(-1)^{\text{ر}} \frac{\text{ن}!}{\text{ر}!\,(\text{ن}-\text{ر})!}\left[\frac{1}{\text{م}} + \frac{\text{ن}-\text{ر}}{\text{م}(\text{م}-1)} + \frac{(\text{ن}-\text{ر})(\text{ن}-\text{ر}-1)}{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)} + \cdots\right]$$

اور دائین طرف $\text{لا}^{\text{ر}}$ کا سر $(-1)^{\text{ر}} \frac{\text{ن}!}{\text{ر}!\,(\text{ن}-\text{ر})!} \cdot \frac{1}{\text{م}-\text{ن}+\text{ر}}$ اب ہم کو یہہ ثابت کرنا ہے کہ یہہ دونو برابر ہین ن - ر کی جگہہ ص رکہو تو ہمکو یہہ ثابت کرنا ہوگا کہ

$$\frac{1}{\text{م}} + \frac{\text{ص}}{\text{م}(\text{م}-1)} + \frac{\text{ص}(\text{ص}-1)}{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)} + \cdots = \frac{1}{\text{م}-\text{ص}}$$

اور یہہ استقرا سے ثابت ہوسکتا ہے جب ص = ۱ تو ثبوت ظاہر ہے خواہ م کی کچہہ قیمت ہو اور م - ۱ فنا نہ ہوتا ہو فرض کرو کہ ص کی کسی خاص قیمت کے موافق دعوی درست ہے بالفرض که لسب نما فنا نہ ہوتا ہو م کو م - ۱ سے بدل دو اور فرض کرلو کہ م - ص - ۱ فنا نہین ہوتا پس

$$\frac{1}{\text{م}} + \frac{\text{ص}}{\text{م}(\text{م}-1)} + \frac{\text{ص}(\text{ص}-1)}{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)} + \cdots = \frac{1}{\text{م}-\text{ص}}$$

$$\frac{1}{\text{م}-1} + \frac{\text{ص}}{(\text{م}-1)(\text{م}-2)} + \frac{\text{ص}(\text{ص}-1)}{(\text{م}-1)(\text{م}-2)(\text{م}-3)} + \cdots = \frac{1}{\text{م}-\text{ص}-1}$$

اول نتیجہ کو دوسرے نتیجہ سے تفریق کرو تو

$$\frac{1}{\text{م}(\text{م}-1)} + \frac{2\text{ص}}{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)} + \frac{3\text{ص}(\text{ص}-1)}{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)(\text{م}-3)} + \cdots = \frac{1}{\text{م}-\text{ص}-1} - \frac{1}{\text{م}-\text{ص}}$$

اول نتیجہ پر اس کو زیادہ کرو تو

$$\frac{1}{\text{م}} + \frac{\text{ص}+1}{\text{م}(\text{م}-1)} + \frac{(\text{ص}+1)\text{ص}}{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)} + \cdots = \frac{1}{\text{م}-\text{ص}-1}$$

اور یہہ وہی نتیجہ ہے کہ ہم ص کو ص + ۱ سے بدلنے مین حاصل کرتے پس اگر یہہ مسئلہ ص کی کسی خاص قیمت کے موافق درست ہے تو وہ اوسکی صورت مابعد کے لیے بہی صحیح ہے اور جب وہ ص = ۱ کی صورت مین صحیح ہے تو وہ علے العموم صحیح ہوگا

(۲۴۷) دائین طرف تمام ارقام کو منتقل کرو اور اونکو دو دو گروہ جو ایک دوسرے کو فنا کرتی ہین تو ہم کو ایک ایسا سلسلہ حاصل ہوگا کہ اوسکی ہر ایک رقم ($\text{ا}^{\text{ن}}$ - $\text{ب}^{\text{ن}}$) ($\text{ا}^{\text{ق}}$ - $\text{ب}^{\text{ق}}$) کی صورت کی ہوگی اور یہہ ارقام مثبت ہین کیونکہ دونو جزو ضربی کیا مثبت ہین یا منفی ہین وغیرہ

(۲۴۸) بموجب ضابطہ فرسیٹ ع^ن = ۱ + ک ن ایمین ک کوئی صحیح عدد ہے اب
ن ؕ قوت مین طرفین کو اوٹہاؤ تو دائین طرف ع حاصل ہوگی اور بائین طرف صورت
مفصلہ لکہنے سے ۱ + ع ن ایمین ع کوئی صحیح ہے

(۲۴۹) واقعہ کے مشاہدہ سے پہلے چہہ فرض نوٹون کی نسبت ہوسکتی ہین جنکا احتمال برابر ہے
(۱) تین نوٹ پانچ پانچ روپیہ کے ہون (۲) دو نوٹ پانچ پانچ
روپیہ کے ایک بیس روپیہ کا (۳) دو نوٹ پانچ پانچ روپیہ کے اور ایک دس روپیہ کا
(۴) ایک پانچ روپیہ کا اور دو دس دس روپیہ کے (۵) ایک پانچ روپیہ کا
دو بیس بیس روپیہ کے (۶) ایک پانچ روپیہ کا دوسرا دس روپیہ کا تیسرا بیس روپیہ کا
بموجب ان فرضون کے جو واقعہ پیش آیا ہے اوسکا احتمال ۱ و ۲/۳ و ۲/۳ و ۱/۳ و ۱/۳ و ۱/۳ اور
بعد مشاہدہ واقعہ کے یہہ احتمالات جداگانہ ہین ۳/۱۰ و ۲/۱۰ و ۲/۱۰ و ۱/۱۰ و ۱/۱۰ و ۱/۱۰
اسیواسطے دوبارہ نکالنے مین جو کچھ نکلے اوسکی قیمت روپیون مین
۱/۳ × ۱/۱۰ [۳۵ + ۴۵ + ۲۵ + ۲۰×۲ + ۳۰×۲ + ۵×۳×۳]
یعنی ۲۵۰/۳۰ یعنی ۲۵/۳ یعنی ۸ ۱/۳ ہے

(۲۵۰)

	۱ +	۰ +	۳ −	۱۲ +	۴
۴		۴ +	۱۶ +	۲۸ −	۱۲۸ − ۸۳۲
۱۲ −			۱۲ −	۴۸ −	۸۴ + ۳۸۴ + ۲۴۹۶
	۱ +	۴ +	۷ −	۳۲ −	۲۰۸ − ۴۴۸

پس (لا^۴ + ۳ لا^۲ − ۱۲ لا + ۴) / (لا^۲ − ۴ لا + ۱۲) = لا^۲ + ۴ لا − ۷ − ۳۲ لا^-۱ − ۲۰۸ لا^-۲ − (۴۴۸ لا^-۳ − ۲۴۹۶ لا^-۴) / (لا^۲ − ۴ لا + ۱۲)

(۲۵۱) اول مساوات کو اسطرح لکہہ سکتے ہین لا^۲ ی (ی − ۱) + لا (ی − ۱) − ۴ (ی − ۱) = ۰
پس کیا تو ی − ۱ = ۰ یا لا^۲ ی + لا − ۴ = ۰ اب ی = ۱ اور اس کو دوسری
مساوات مین مندرج کرو تو ہم کو یہہ دریافت ہوگا کہ لا = ۱ اگر لا^۲ ی + لا − ۴ = ۰
لیکن تو دوسری مساوات یہہ ہوجائیگی کہ

لا ی۲ + لا (ی − ۳ ی۲) + ۱ = ۰ ۔ اسمین لا ی کی قیمت مساوات اول سے نکال کر رکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ (۴ − لا) ی۲ + لا (ی − ۳ ی۲) + ۱ = ۰ ۔ اسیواسطے

۴ ی۲ (۱ − لا) + لا ی + ۱ = ۰ اسیواسطی ۴ ی۲ (۱ − لا) + ۴/لا = ۰ اسیواسطی

ی۲ = ۱ / لا (لا − ۱) اور ی = (۴ − لا) / لا۲ اسیواسطی ((۴ − لا) / لا۲)۲ = ۱ / لا (لا − ۱)

اسیواسطی (۴ − لا)۲ (لا − ۱) = لا۳ اسیواسطی ۱۶ − ۲۴ لا + ۹ لا۲ = ۰

اسیواسطی لا = ۴/۳ تو ی = ۳/۲

(۲۵۲) ہمکو معلوم ہے کہ ا۱ − ا = ا۱ − ا اور ا۲ − ا۱ = ا۱ − ا + د اور ا۳ − ا۲ = ا۱ − ا + ۲ د ...

ار − ار−۱ = ا۱ − ا + (ر − ۱) د اسیواسطی جمع کرنے سے

ار − ا = ر (ا۱ − ا) + ر (ر − ۱)/۲ د اور ان+۱ وہی ہے جو ب ہے تو ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے

کہ ب − ا = (ن + ۱)(ا۱ − ا) + (ن + ۱)(ن د)/۲ اسیواسطی

ا۱ − ا = (ب − ا)/(ن + ۱) − ن/۲ د اسے ا۱ − ا دریافت ہوتا ہے تو ا۲ اور ا۳ ...

معلوم ہوجائینگے پس اسطرح ہمکو یہہ دریافت ہوتا ہے کہ ا۱ = ا + (ب − ا)/(ن + ۱) − ن د/۲ اور

ان = ب − [(ب − ا)/(ن + ۱) + ن د/۲] ہم ب کو بڑا ا سے فرض کرتے ہین تو اسلیئے کہ

ا۱ و ا۲ ... ان درمیان ا اور ب کے واقع ہون ا۱ بڑا ا سے اور ان چھوٹا ب سے

ہونا چاہئے پس (ب − ا)/(ن + ۱) − ن د/۲ اور (ب − ا)/(ن + ۱) + ن د/۲ دونو مثبت ہونی چاہئی پس

۲ (ب − ا) / ن (ن + ۱) اور − ۲ (ب − ا) / ن (ن + ۱) کے درمیان د واقع ہوگا

(۲۵۳) ر کی قیمت ۳/۸۸ ہے فرض کرو کہ ضبط ہونیوالی معافی کے آمدنی ط روپیہ سالیانہ ہے

تو ۱۰۰ = ۳/ر + ط/ر (۱ − ط−۳۰) اسیواسطی ۱۲ = ط/ر (۱ − ط−۳۰) اسیواسطی

ط = ۱۲ × ۳/۸۸ × ۱/(۱ − ط−۳۰) اب ط = ۱ + ر = ۱ + ۳/۸۸ = ۹۱/۸۸

اسیواسطے لوگ ط−۳۰ = − ۳۰ لوگ (۱۳ × ۷)/(۸ × ۱۱) = − ۳۰ (لوگ ۱۳ + لوگ ۷ − لوگ ۱۱ − ۳ لوگ ۲)

= − ۰۴۳۶۸۰ = ۱ − + ۰۵۶۳۲۰ = لوگ ۳۶۵۸ ۰ پس

ط = ۱۲ × $\frac{۳}{۸۸}$ × $\frac{۱}{۱-۳۶۵۸ ء}$ = ۴۵ ء ۱ تقریباً

(۲۵۴) $\sqrt{۱+\frac{۱}{۲}}$ کی تحویل جب مسلسل کی طرف ہوگی تو ہر ایک خارج قسمت الجاء اول کے ۲ ا ہو گا پس عن = ۲ ا عن-۱ + عن-۲ اور

قن = ۲ ا قن-۱ + قن-۲ دفعہ ۴۱۴ کا اول سلسلہ

۰ و ا و ا و ا ۰۰ اور (۲) سلسلہ ا و ا و ا ۰۰۰ ہوگا اسواسطے

بموجب دوسرے دفعہ کے ($\frac{۱}{۲}$+۱) قن = ا عن + عن-۱ اور عن = ا قن + قن-۱

ان چاروں مساواتوں میں سے اول مساوات سے عن-۱ = $\frac{عن - عن-۲}{۲ ا}$ اب ن کو ن+۱ سے تبدیل کرو اور اسکو تیسری مساوات میں

اسیواسطے ۲ ($\frac{۱}{۲}$+۱) قن = عن+۱ + عن-۱ اور پھر دوسری مساوات سے

قن-۱ = $\frac{قن - قن-۲}{۲ ا}$ اسمین ن کو ن+۱ سے تبدیل کرو اور مساوات چہارم میں مندرج کرو تو آخر

تو عن = $\frac{قن+۱ - قن-۱}{۲}$ + قن-۱ اسیواسطے ۲ عن = قن+۱ + قن-۱

(۲۵۵) فرض کرو کہ ی کو لا سیب اور ی ناشپاتیان اور ی آڑو خریدے تو لا + ی + ی = ۱۲

اور $\frac{لا}{۵}$ + ی + ۲ ی = ۱۲ تفریق کرنے سے $\frac{۴}{۵}$ لا − ی = ۱۰ اب ی کی قیمت دونوں مساواتوں

مین مندرج کرو تو $\frac{۹}{۵}$ لا + ی = ۱۲ اس سے معلوم ہوا کہ $\frac{لا}{۵}$ ایک صحیح ہو اسکو = ط کے فرض کرو تو

لا = ۵ ط اور ی = ۱۲ − ۹ ط اور ی = ۴ ط اگر ط = ۰ تو لا = ۰ اور

ی = ۱۲ اور ی = ۰ اور اگر ط = ۱ تو لا = ۵ اور ی = ۳ اور ی = ۴

(۲۵۶) فرض کرو کہ $\frac{۱ + ب لا}{(۱ - ح لا)(۱ - \frac{لا}{ح})}$ = $\frac{ط}{۱ - ح لا}$ + $\frac{ص}{۱ - \frac{لا}{ح}}$ اسیواسطے

۱ + ب لا = ط (۱ − $\frac{لا}{ح}$) + ص (۱ − ح لا) چونکہ یہہ مساوات متطابقہ ہے

اسلئے ہم لا کی جو قیمت چاہین مقرر کرسکتے ہین فرض کرو کہ لا = $\frac{۱}{ح}$ تو ۱ + $\frac{ب}{ح}$ = ط (۱ − $\frac{۱}{ح^۲}$)

پس ط = − $\frac{ح (۱ ح + ب)}{۱ - ح^۲}$ فرض کرو کہ لا = ح تو ۱ + ب ح = ص (۱ − ح^۲)

پس ص = $\frac{۱ + ب ح}{۱ - ح^۲}$ پس $\frac{۱ + ب لا}{(۱ - ح لا)(۱ - \frac{لا}{ح})}$ = $\frac{۱ + ب ح}{۱ - ح^۲}$ $\frac{۱}{۱ - \frac{لا}{ح}}$ − $\frac{ح (۱ ح + ب)}{۱ - ح^۲}$ $\frac{۱}{۱ - ح لا}$

مساوات (۱) میں ... ح ع = ... + $\frac{۱}{ح}$ ...

... ۹۹ پر خیال کرین چونکہ $(۱۰۵+۱)^۲ - (۱۰۵-۱)^۲ = ۱۲۰۰$

تو اسسے معلوم ہوا کہ ۱۵ سے ۹۹ تک کے درمیان مین جو نتایج اعداد کے لیے حاصل ہوتے ہین وہی ۹۴ سے آنک حاصل ہوتے ہین اب امتحان کرنے سے معلوم ہوگا کہ ۹۵ صورتین ہین جنمین سیکڑے کی مرتبہ پر ہندسہ جفت ہے اور ۴ صورتین ایسی ہین کہ جنمین ہندسہ طاق ہے اسسے ثابت ہوا کہ سیکڑہ کی مرتبہ پر مجذور کے اندر طاق ہندسے ہونیکا احتمال $\frac{۴}{۱۰۰}$ ہے

(۲۶۰) فرض کرو کہ جملہ $= ۱ + ط_۱ لا + ط_۲ لا^۲ + ط_۳ لا^۳ + \dots$ اسمین $ط_۱$ اور $ط_۲$ اور $ط_۳ \dots$ مین لا شامل نہین ہے اب لا کو ح لا سے بدلو تو یہہ نتیجہ نکلے گا کہ

$$\frac{۱+ح لا}{۱-ح لا}(۱ + ط_۱ ح لا + ط_۲ ح^۲ لا^۲ + ط_۳ ح^۳ لا^۳ + \dots) = ۱ + ط_۱ لا + ط_۲ لا^۲ + \dots$$

کسور کو دور کرو اور لا کے سرون کو برابر لکھو تو

$$ط_ر ح^ر + ط_{ر-۱} ح^{ر-۱} = ط_ر - ط_{ر-۱} ح \qquad \text{اسیواسطے}$$

$ط_{ر-۱}(ح + ح^ر) = ط_ر(۱ - ح^ر)$ پس $ط_ر = \frac{ح(۱ + ح^{ر-۱})}{۱ - ح^ر} ط_{ر-۱}$ اسی متواتر ہر ایک کا سر دریافت ہوگا پس $ط_۱$ تعبیر اکو کرتا ہے اسیواسطے

$ط_۱ = \frac{ح(۱+۱)}{۱-ح}$ اور $ط_۲ = \frac{ح(۱+ح)}{۱-ح^۲} ط_۱ = \frac{ح^۲(۱+۱)(۱+ح)}{(۱-ح)(۱-ح^۲)}$ اور علیٰ ہذا لقیاس

(۲۶۱) $س^۴ + س^۲ ص^۲ + ص^۴ = (س^۲+ص^۲)^۲ - ۲س^۲ص^۲ = [(س+ص)^۲ - ۲س ص]^۲ - ۲س^۲ص^۲$

$$= \left(\frac{ب^۲}{۱^۲} - \frac{۲ح}{۱}\right)^۲ - \left(\frac{ح}{۱}\right)^۲ = \frac{ب^۴}{۱^۴} - \frac{۴ب^۲ح}{۱^۳} + \frac{۳ح^۲}{۱^۲}$$

(۲۶۲) سلسلہ موسیقیہ کے موافق جو سلسلہ حسابیہ ہو اوسکی اول رقم ۱ اور فرق عام ب مقرر کرو تو

$\frac{۱}{ن} = ۱ + (م-۱)$ ب اور $\frac{۱}{م} = ۱ + (ن-۱)$ ب اسی سے ہمکو یہہ حاصل ہونا ہے کہ $۱ = ب = \frac{۱}{م ن}$ فرض کرو کہ سلسلہ موسیقیہ کی روین رقم لا ہے تو $\frac{۱}{لا} = ۱ + (ر-۱)$ ب

$= \frac{ر}{م ن}$ اسیواسطے $لا = \frac{م ن}{ر}$

(۲۶۳) فرض کرو کہ ن وین رقم کو س ن تعبیر کرتا ہی تو $س_ن = \sqrt{س_{ن-۱} س_{ن-۲}}$ اسیواسطے

$لوگ س_ن = \frac{۱}{۲}(لوگ س_{ن-۱} + لوگ س_{ن-۲})$ فرض کرو کہ لوگ $س_ن = م_ن$ پس

مسن = ۱/۲ (مسن-۱ + مسن-۲) اسے موافق مثال ۱۹۶ کے یہہ حاصل ہوگا کہ

مسن = م۱ + ۲/۳ (م۲ - م۱) [۱ - (- ۱/۲)ن-۱] پس جب ن کا منتہی بڑا ہو تو

زن - مسن کو جتنا چاہیں قریب م۱ + ۲/۳ (م۲ - م۱) کے یعنے (۲م۲ + م۱)/۳

کے لاسکتے ہیں پس جب ن کا منتہی بڑا ہو تو یہہ رکہہ سکتے ہیں کہ

لوگ سن = (۲لوگ ب + لوگ ا)/۳ = لوگ (ب۲ ا)۱/۳ پس سن = (ب۲ ا)۱/۳

(۲۶۴) فرض کرو کہ ب کو ا پر تقسیم کرنے سے خارج قسمت ع نکلتا ہے اور باقی رہتی ہے تو

ب = ع ا + ر سیو اسطی ب/ا بڑا ع/(۱+ع) سے ہوا فرض کرو کہ

ا/ب = ۱/(ع+۱) + ا۱/ب۱ تو ا۱/ب۱ = (ا(ع+۱) - ب)/(ب(ع+۱)) = (ا - ر)/(ب(۱+ع)) = (ا - ر)/(ب ق۱) یہاں ق۱ بجائے

ع + ۱ کے ہے اور اسی طرح سے ہم ا۱/ب۱ کو ۱/(ق۱ ق۲) + ا۲/ب۲ کے صورت میں رکہہ سکتے ہیں

جسمیں ب۲ = ب ق۱ ق۲ اور اگر چہوٹا ا۲ سے ہے اسی طرح عمل کرنے سے ہم صورت مطلوب

حاصل کر سکتے ہیں اگر ب = ۷ اور ا = ۵ تو ق۱ = ۲ اور ق۲ = ۳ اور ق۳ = ۴ اور ق۴ = ۷

(۲۶۵) فرضکرو کہ اول قسم کے سکے لا اور دوسری قسم کے سکے ی ہیں تو

۱۰۸ = ۸۱/۱۰۰ لا + ۶۶۶۶/۱۰۰۰ ی سیو اسطی ۹۹ لا + ۷۴ ی = ۱۲۰۰۰ سیو اسطے

۴۵ لا + ۳۷ ی = ۶۰۰۰ سکو ۳۷ پر تقسیم کرو تو لا + ی + (۴لا - ۳)۲/۳۷ = ۱۶۲

سیو اسطی (۴لا - ۳)/۳۷ ایک صحیح ہونا چاہئے اسکو = ص کے فرضکرو تو ۴لا = ۳ + ۳۷ص

۴ پر تقسیم کرو تو لا = ۹ص + (ص + ۳)/۴ سیو اسطے (ص + ۳)/۴ ایک صحیح ہو تو سکو برابر ط کی

رکہو تو ص = ۴ط - ۳ سیو اسطی لا = ۳۷ط - ۲۷ اور ی = ۱۹۵ - ۴۵ط پس

حل ط = ۱ و ۲ و ۳ و ۴ کے رکہنے سے حاصل ہونگے اور لا = ۱۰ اور ی = ۱۵۰ اور لا = ۴۷

اور ی = ۱۰۵ اور لا = ۸۴ اور ی = ۶۰ اور لا = ۱۲۱ اور ی = ۱۵ حاصل ہوگا اول

حل سے سکوں کی تعداد سب سے بڑی معلوم ہوتی ہے اور قیمت کے اعتبار سے مقدار کم

اور آخر حل سے سکوں کی تعداد سب سے کم اور قیمت کے اعتبار سے سب سے بڑی مقدار

(۲۶۶) ہم کو معلوم ہے کہ $س_ن = ۲ا\, س_{ن-۱} + س_{ن-۲}$ اور $ق_ن = ۲ا\, ق_{ن-۱} + ق_{ن-۲}$ پس

$$\frac{س_ن}{ق_ن} - \frac{س_{ن-۲}}{ق_{ن-۲}} = \frac{۲ا\,(س_{ن-۱}\, ق_{ن-۲} - س_{ن-۲}\, ق_{ن-۱})}{ق_ن\, ق_{ن-۲}}$$

پس جزو ضربی ۲ا شمار کنندہ مین واقع ہوتا ہے - اور یہہ درست ہے خواہ ن طاق ہو خواہ جفت لیکن ان دونو صورتون مین فرق ہے - ہم کو معلوم ہے کہ $ق_۱ = ۱$ پس ارتباط $ق_ن = ۲ا\, ق_{ن-۱} + ق_{ن-۲}$ سے متواتر ثابت ہوتا ہے کہ $ق_۳$ و $ق_۵$ و $ق_۷$ ... پوری پوری ۲ا پر تقسیم ہوتی ہین سوا اسکے $س_{ن-۱}\, ق_{ن-۲} - س_{ن-۲}\, ق_{ن-۱}$ تعداداً برابر واحد کے ہی پس کسر کی تحویل نہایت مختصر صورت مین کیجائے تو اوس صورت مین کہ ن جفت ہوگا شمار کنندہ ا ہے اور اگر ن طاق ہو تو شمار کنندہ ۲ا ہے

(۲۶۷) فرض کرو کہ تعداد ارقام ن ہے تو ہم کو یہہ ثابت کرنا ہے کہ $\frac{ا(۱+ر^{ن-۱})}{۲}$ بڑا ہے $\frac{ا(۱+ر+ر^۲+\dots+ر^{ن-۱})}{ن}$ سے
یعنی $ن(۱+ر^{ن-۱})$ بڑا ہے $۲(۱+ر+ر^۲+\dots+ر^{ن-۱})$ سے ہے - اب ہم بائین طرف کے رکن کے ن ازواج ایسے بنا سکتے ہین جیسے کہ $ر^{م-۱} + ر^{ن-م}$ جسمین م کی متواتر قیمتین ا سے ن تک لی گئی ہین اور $۱+ر^{ن-۱}$ بڑا ہے $ر^{م-۱} + ر^{ن-م}$ سے ہی اسلئے کہ $۱+ر^{ن-۱} - (ر^{م-۱}+ر^{ن-م}) = (۱-ر^{م-۱})(۱-ر^{ن-م})$
یہہ دونو جزو ضربی کیا مثبت ہین یا منفی

(۲۶۸) مثال ۲۲۸ مین ثابت ہو چکا ہے کہ تین مقادیر ا اور ب اور ج مین سے ایک ۵ پر پوری تقسیم ہوتی ہے اور اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہین کہ کیا ا یا ب پورا ۳ پر تقسیم ہو - اب یہہ ناممکن ہے کہ ا اور ب دونو طاق ہون اسلئے کہ اس صورت $ا^۲ + ب^۲$ پورا ۲ پر تقسیم ہوگا اور ۴ پر نہین ہوگا برخلاف اسکے $ج^۲$ پورا ۴ پر تقسیم ہوتا ہے اگر ج جفت ہو اور نہین ۲ پر بھی نہین تقسیم ہوگا اگر ج طاق ہو اسے معلوم ہوا کہ ا اور ب کیا دونو جفت ہین یا اونمین سے ایک جفت اور دوسرا طاق ہے - اگر ا اور ب جفت ہین تو ج طاق ہے فرض کرو کہ $ا = ۲ع+۱$ اور $ج = ۲ق+۱$

تو $ب^۲ = (۲ق+۱)^۲ - (۲ع+۱)^۲ = ۴ق(ق+۱) - ۴ع(ع+۱)$

پس $ب^۲$ پورا ۸ پر تقسیم ہوتا ہے اسلئے دونون صورتون مین ا ب ج پورا ۵×۴×۳ پر تقسیم ہوتا ہے

اگر اعداد اولے ۳ سے بڑا ہو تو وہ نہ ۳ پر پورا تقسیم ہوگا نہ ۴ پر پس چاہیے کہ پوری ۳ پر بھی اور ۴ پر بھی تقسیم ہو اسیواسطی وہ ۳ × ۴ پوری تقسیم ہوتی ہے

(۲۶۹) دو خاص اعداد مقررہ کے نکالنے کا احتمال $\frac{2}{ن(ن-1)}$ ہے پس توقع روپیونکی $\frac{2}{ن(ن-1)}$ × ص ہے اسمین ص اوس حاصلضرب کو تعبیر کرتا ہی کہ ان اعداد طبعی مین سے دو دو کا لین۔ تو بموجب مثال ۵۵ اکی روپیون مین اوسکی توقع کی قیمت $\frac{2}{ن(ن-1)} \times \frac{(ن-1)ن(ن+1)(3ن+2)}{24}$ یعنی $\frac{(ن+1)(3ن+2)}{12}$ ہے

(۲۷۰) فرض کرو کہ عر احتمال اوس شخص کے جیتنے کا روین برس تک ہی اور قر احتمال وسکے مرنے کا روین سال کے آخر مین ہی۔ اور وہ روپیہ جواب دیا جائے اور بار بار دیا جائیگا ہے تو قیمت حال ع روپیہ کی جو اوسکے مرنے پر ملے گا ع $(\frac{قر_1}{ر} + \frac{قر_2}{ر^2} + \frac{قر_3}{ر^3} + \dots)$ ہے اور قیمت حال قسطون کی لا $(1 + \frac{عر_1}{ر} + \frac{عر_2}{ر^2} + \frac{عر_3}{ر^3} \dots)$ اب یہہ دو نو قیمت حال برابر ہونی چاہیے اور سوا اسکے ہم یہہ بھی جانتے ہین کہ $عر = قر - قر_{ر+1}$ اور یہہ خیال کرکے کہ قر برابر ا کے ہی اور ط = $\frac{قر_1}{ر} + \frac{قر_2}{ر^2} + \frac{قر_3}{ر^3} + \dots$ پس لا(ا+ط) = ع$(\frac{1}{ر} + \frac{ط}{ر} - ط)$

پس $لا = \frac{ع}{ر} - \frac{ع\, ط}{ط+1}$

(۲۷۱) فرض کرو کہ ہر ایک کسر = ک تو ک لوگ لا = لا(ی + ی + لا) اور ک لوگ ی = ی(ی + لا - ی) اول مساوات کو ی مین اور دوسرے کو لا مین ضرب دو اور جمع کرو تو ی لوگ لا + لا لوگ ی = $\frac{2\, لا\, ی}{ک}$ اسیواسطی $ی^{لا}\, لا^{ی} = ی^{\frac{2لای}{ک}}$ اسی طرح سے $لا^{ی}\, ی^{لا}$ اور $ی^{لا}$ $ی^{ی}$ اسکے برابر ثابت ہو سکتی ہین

(۲۷۲) اول مساوات مین انتقال مقادیر کرکے مجذور کرو تو

$(لا^2 + ا^2)(ی^2 + ب^2) = (لا^2 + ب^2)(ی^2 + ا^2) - 2(ا+ب)^2 \sqrt{(لا^2 + ب^2)(ی^2 + ا^2)} + (ا+ب)^4$

اسیواسطی $(لا^2 - ی^2)(ا^2 - ب^2) - 2(ا+ب)^2 \sqrt{(لا^2 + ب^2)(ی^2 + ا^2)} + (ا+ب)^4 = 0$

لیکن $لا^2 - ی^2 = (لا + ی)(لا - ی) = (ا+ب)(لا - ی)$ اسیواسطی $(ا+ب)^2$ پر تقسیم کرکے

$\frac{1}{\text{سہ - صہ}}\left[(\text{صہ})^{ن} - (-\text{سہ})^{ن}\right] = \frac{1}{\sqrt{(1+\frac{4}{ع})}}\left[\text{سہ} + \dots \text{سہ} + 1\right]^{ن} = (\text{سہ} - \dots \text{سہ} + 1)^{ن}$

(۲۷۵) فرض کرو کہ $\frac{1 + ۷لا - لا^۲}{(1 - ۱۰لا)(1 + ۳لا)^۲} = \frac{ط}{1 - ۱۰لا} + \frac{\text{ص لا} + \text{س}}{(1 + ۳لا)^۲}$ تو

$1 + ۷لا - لا^۲ = ط(1 + ۳لا)^۲ + (\text{ص لا} + \text{س})(1 - ۱۰لا)$

چونکہ یہہ مساوات متطابقہ ہے اسلئے لا کی ہر ایک قیمت ہو سکتی ہے فرض کرو کہ لا $= \frac{1}{۱۰}$ تو

$1 + \frac{۷}{۱۰} - \frac{1}{۱۰۰} = \frac{۱۶۹}{۱۰۰}$ ط پس ط $= 1$ اسیواسطے

$1 + ۷لا - لا^۲ - (1 + ۳لا)^۲ = (\text{ص لا} + \text{س})(1 - ۱۰لا)$

یعنے لا$(1 - ۱۰لا) = (\text{ص لا} + \text{س})(1 - ۱۰لا)$ اسیواسطے لا = ص لا + س اسیواسطے ص = 1

اور س = ۰ پس $\frac{1 + ۷لا - لا^۲}{(1 - ۱۰لا)(1 + ۳لا)^۲} = \frac{1}{1 - ۱۰لا} + \frac{لا}{(1 + ۳لا)^۲} = (1 - ۱۰لا)^{-1} + لا(1 + ۳لا)^{-۲}$

لا^{ن} کا سر صورت مفصلہ مین $۱۰^{ن} + ن(-۳)^{ن-۱}$ ہے

(۲۷۶) فرض کرو کہ ۱۸ = ۴ع + ق اور ۸۰ = ۱۸ع + ۴ق اسسے یہہ معلوم ہوتا ہے کہ

ع = ۴ اور ق = ۲ اور یہہ قیمتین ۳۵۶ = ۸۰ع + ۱۸ق کی تصدیق کرتے ہین مان لو

کہ ۸ = ۳ع + ۲ق + ر اور ۱۳ = ۸ع + ۳ق + ۲ر اور ۳۰ = ۱۳ع + ۸ق + ۳ر

اسسے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ ع = ۰ ق = ۳ اور ر = ۲ اگر ۵۵ = ۳۰ع + ۱۳ق + ۸ر

کی تصدیق ہوتے ہے

(۲۷۷) اول اگر م = ۱ تو تغیر مساوات مساوات بجاتی ہے - دوم اگر م = ۲ تو ہمکو یہہ ثابت کرنا ہے کہ

$(ن-1)(ا^۲ + ب^۲ + ج^۲ + \dots + ک^۲)$ بڑا ۲ (اب + اج + ۰۰ + ب ج + ۰۰۰) سے ہے

اور یہہ مطابق ۱۵ باب ۲۰ مثال سے ہے سوم اگر م = ۳ تو ہمکو یہہ ثابت کرنا ہے کہ

$(ن-1)(ن-2)(ا^۳ + ب^۳ + ج^۳ + \dots + ک^۳)$ بڑا ۲×۳ (اب ج + اب د + ۰۰ + ب ج د + ۰۰) سے ہے

بائین طرف کا رکن = ۲ (اط + ب ص + ج س + ۰۰) اسمین ط اوس حاصلضرب کو تعبیر کرتا ہے

جسمین سوا ا کے سب حروف مین سے دو دو کو ضرب دیا ہے اور ص اوس حاصلضرب کو بتاتا ہے

جسمین سوا ب کے سب حروف مین سے دو دو کو ضرب دیا ہے اور علی ہذا القیاس مثلاً ا ب ج تینون

۱ط اور ب ص اور ح س مین واقع ہوگا یعنی وہ تین دفعہ کل مین آئیگا اب بموجب فرض دوم کے
ہم جانتے ہین کہ ۲ط سوای حرف ا کی تمام حرفون کے مجذورون کی مجموعہ کی (ن-۲) گنے سے
چھوٹا ہے پس اگر ہم تمام حرفون کے مربعون کے مجموعہ کو مح۲ سے تعبیر کرین تو ۲ط چھوٹا مح۲ - ا۲ سے ہے
اور اسی طرح ۲ص چھوٹا مح۲ - ب۲ سے اور ۲س چھوٹا مح۲ - ح۲ اور علے ہذا القیاس
پس بائین طرف کا رکن چھوٹا (ن-۲) [ا(مح۲ - ا۲) + ب(مح۲ - ب۲) + ح(مح۲ - ح۲) + ...] سے ہے
یعنے بائین طرف کا رکن چھوٹا (ن-۲) [مح۱ مح۲ - مح۳] سی ہے اسمین ا + ب + ح + ... کو مح۱
اور ا۳ + ب۳ + ح۳ + ... کو مح۳ تعبیر کرتا ہے اور مح۱ مح۲ چھوٹا ن مح۳ سے
بموجب مثال ۲۴۷ کی ہے پس واسطی بائین طرف کا رکن چھوٹا بہ نسبت (ن-۱) (ن-۲) مح۳ کی ہے
چہارم فرض کرو کہ م = ۴ یہہ صورت اوسیطرح فرض سوم اور ۲۴۷ مثال کی اعانت سی ثابت
ہوسکتی ہے جسطرح صورت فرض دوم اور ۲۴۷ مثال کی مدد سے ثابت ہوئی تہی

(۲۷۸) بموجب مسئلہ فرمیٹ کی ا^(ن-۱) - ۱ اضعاف ن کا ہے اب کیا تو دیا ا^(ن-۱) - ۱ جفت
عدد ہونا چاہئے پس وہ دو کا اضعاف ہی اسے معلوم ہوا کہ ۲ کے برابر ن ہو تو یہہ
ثابت کرنا ہی کہ ا(ا^(ن-۱) - ۱) اضعاف ۲ن کا ہے یعنے ا^ن - ا اضعاف ۲ن کا ہے
اسیواسطی ا^ن اور ا جب موافق قسطاس ۲ن کے یہان لیجائین گے تو انکے اول
ایک ہی ہندسہ ہوگا

(۲۷۹) واقعہ کی مشاہدہ سی پہلے سکون کی نسبت چار فرض ہوسکتے جنکا احتمال وقوع برابر ہے
(۱) ۵ شلنگ (۲) ۴ شلنگ ا سورن (۳) ۳ شلنگ ۲ سورن (۴) ۲ شلنگ ۳ سورن
اب واقعہ کے مشاہدہ کا احتمال ان فرضون کے موافق ا و ۶/۱۰ و ۳/۱۰ و ۱/۱۰ ہے بعد واقعہ کے
مشاہدہ کے فرضون کے احتمال ۱۰/۲۰ و ۶/۲۰ و ۳/۲۰ و ۱/۲۰ ہین اب بموجب فرض اول کے
تین روپے تہیلی مین باقی ہونگے پس قیمت سکون کی جو نکلیگی ۲ روپیہ ہوگی دوسرے
فرض کے بموجب تہیلی مین ۲ روپیہ اور ایک اشرفی ہوگی سلئے قیمت سکون کی جو نکلیگی (۲+۲×۱)/۳ شلنگ ہوگی

یعنی $\frac{۴۴}{۳}$ شلنگ اور بموجب تیسرے فرض کے تھیلی مین ایک شلنگ اور ۲ سورن باقی رہینگی اسلئے سکے جو نکلینگے اونکی قیمت $\frac{۲\times۲۰+۲\times۲۱}{۳}$ شلنگ یعنی $\frac{۸۲}{۳}$ شلنگ ہوگی

اب بموجب آخر فرض کے تھیلی مین تین سورن ہونگین اسلئے سکے جو نکلینگے اونکی قیمت ۴۰ شلنگ ہوگی

پس کل قیمت جو سکے نکلینگے $\frac{۱}{۳۰}\times۲ + \frac{۶}{۳۰}\times\frac{۴۴}{۳} + \frac{۳}{۳۰}\times\frac{۴۲}{۳} + \frac{۱}{۳۰}\times۴۰$

یعنی $\frac{۱}{۳۰}$ [۱۰+۴۴+۴۱+۲۰] یعنے $\frac{۱۱۵}{۱۰}$ یعنے $۱۱\frac{۱}{۲}$ ہے

(۲۸۰) ۲۴۶ مثال مین ہم ثابت کرسکتے ہین کہ

$$\frac{۱}{م}(۱+لا)^{ن} - \frac{ن}{م(م+۱)}(۱+لا)^{ن-۱} + \frac{ن(ن-۱)}{م(م+۱)(م+۲)}(۱+لا)^{ن-۲} \ldots$$

$$= \frac{۱}{م+ن} + ن\frac{لا}{م+ن-۱} + \frac{ن(ن-۱)}{۱\times۲}\frac{لا^{۲}}{(م+ن-۲)} + \ldots$$

لا کی علامت بدلو اور تفریق کرو تو نتیجہ مطلوب حاصل ہوجائیگا

(۲۸۱) فرض کرو کہ $\frac{لا^{۲}-۲لا-۳}{۲لا^{۲}+۲لا+۱} = ی$ تو $لا^{۲}-۲لا-۳ = ی(۲لا^{۲}+۲لا+۱)$

اسیواسطی $لا^{۲}(۲ی-۱) + ۲لا(ی+۱) + ی+۳ = ۰$ اس مساوات درجہ دوم کے حل کرنیسے یہہ حاصل ہوتا ہی کہ $لا = \frac{-(ی+۱)\pm\sqrt{-(ی+۳)(ی-۱)}}{۲ی-۱}$ اسلئے ثابت ہوا کہ ی ۱ اور -۳ کے درمیان ی کا ہونا چاہئے تا کہ لا اصلی قیمت رکھے

(۲۸۲) اول مساوات کا مجذور کرو تو $لا+ی = ا - ۲(لای)^{\frac{۱}{۲}}$ پہر مجذور کرو تو $لا^{۲}+ی^{۲} = ا^{۲} - ۴(لای)^{\frac{۱}{۲}} + ۲لای$ اب دوسری مساوات انتقال رقام کرکے مجذور کرو تو $لا^{۲}+ی^{۲} = ب^{۲} - ۲ب(۲لای^{\frac{۱}{۲}}) + ۲لای$ پہلے اول نتیجہ کو کام مین لائین تو یہہ حاصل ہوگا کہ $ا^{۲} - ۴ا(لای)^{\frac{۱}{۲}} + ۲لای = ب^{۲} - ۲ب(۲لای)^{\frac{۱}{۲}} + ۲لای$ اسیواسطی $(لای)^{\frac{۱}{۲}} = \frac{ا^{۲}-ب^{۲}}{۴ا-۲ب}$ اول مساوات کو مجذور کرو اور آخر مساوات کی چہ چند کو تفریق کرو تو $(لا^{\frac{۱}{۲}} - ی^{\frac{۱}{۲}})^{۲} = ا - \frac{۴(ا^{۲}-ب^{۲})}{۴ا-۲ب} = \frac{۲ب^{۲}-اب}{۲ا-ب}$

چونکہ $لا^{\frac{۱}{۲}} + ی^{\frac{۱}{۲}}$ اور $لا^{\frac{۱}{۲}} - ی^{\frac{۱}{۲}}$ اسیطرح ہم کو معلوم ہوگئی تو ہم لا اور ی کو آسانی سے دریافت کرسکتے ہین

اسی معلوم ہوا کہ لا^ن-۱ کا سر = ب/(ر - س) (ر^ن - س^ن) اور لا^ن کا سر =

۱/(ر - س) [ر^ن+۱ (۱ - س) - س^ن+۱ (۱ - ر)] = ۱/(ر - س) [ر^ن+۱ - س^ن+۱ - ر^ن + س^ن]

مثلاً سر = ع_ن اور دوسرا = ع_ن+۱ بموجب مثال ۲۸۳ کے ادبر سلسلہ کا مجموعہ دریافت ہوگا

کہ (۱ + (اب + ۱) لا - لا^۲) / (۱ - (اب + ۱) لا + لا^۲) = ۱/(ر - س) [(ار + (ر - ۱)) ر لا / (۱ - ر لا) - (اس + (س - ۱)) س لا / (۱ - س لا)]

اسی معلوم ہوا کہ لا^۲ن-۲ کا سر = ۱/(ر - س) (ر^ن - س^ن) اور لا^۲ن-۱ کا سر

= ۱/(ر - س) [ر^ن (ر - ۱) - س^ن (س - ۱)] پہلا سر = ق_۲ن-۱ اور

دوسرا سر = ق_۲ن بموجب ۲۸۳

(۲۸۵) فرض کرو کہ دو رقمی عدد کی دہائی کے مرتبہ پر لا کا ہندسہ ہے اور اکائی کے مرتبہ پر ی ہے تو

دوسرا عدد ۱۰ لا + ی ہوگا اور اول عدد = لا ی اور نیز وہ = ۲ (۱۰ لا + ی) - ۱۰۰

اسی واسطے لا ی = ۲ (۱۰ لا + ی) - ۱۰۰ پس لا (۲۰ - ی) = ۱۰۰ - ۲ی

اسی واسطے لا = (۱۰۰ - ۲ی)/(۲۰ - ی) = ۲ + ۶۰/(۲۰ - ی) اسی واسطے ۲۰ - ی عاد ۶۰ کا ہونا چاہیے

اور لا اور ی میں سے کوئی ۹ سے بڑا نہیں ہوسکتا ہے پس اسے معلوم ہوا کہ جو حل اس

سوال سے متعلق ہوسکتا وہ ۲۰ - ی = ۱۲ ہے پس ی = ۸ اور لا = ۷ تو اعداد ۵۶ اور ۷۸ ہوئے

(۲۸۶) فرض کرو کہ ر برس کے آخر میں ایک آدمی کی زندہ رہنے کا احتمال لا_ر سے تعبیر ہوتا ہے

تو اس امر کا احتمال کہ م آدمی عمر معلوم کے ر برس کے آخر تک زندہ رہینگے لا_ر^م ہوگا پس اگر

ب زرسالیانہ ہو تو کم = ب (لا/ط + لا^۲/ط^۲ + لا^۳/ط^۳ + ۰۰) رسالوں کی آخر تک

میں ایک شخص کے مرجانے کا احتمال ۱ - لا_ر ہے اسی واسطے اس امر کا احتمال کہ ن آدمیوں

میں سے ایک شخص بھی زندہ نہ رہیگا (۱ - لا_ر)^ن ہے اسی واسطے

احتمال اس امر کا کہ وہ سب مرجائینگے ۱ - (۱ - لا_ر)^ن ہے اسی واسطے زرسالیانہ

کی قیمت جو ان میں سے ایک بھی زندہ رہنے تک جاری رہے گا

ب [(۱ - (۱ - لا_۱)^ن)/ط + (۱ - (۱ - لا_۲)^ن)/ط^۲ + (۱ - (۱ - لا_۳)^ن)/ط^۳ + ۰۰] ہے

اب جملہ ثنائی کو پھیلاؤ تو ہم کو ایک رقام کا مجموعہ معلوم ہوگا جسکی رقم عام یہہ ہوگی کہ

$$(-1)^ر ب \frac{ن(ن-1)\cdots(ن-ر+1)}{\lfloor ر} \left[\frac{لا^ر}{ط} + \frac{لا^ر}{ط^2} + \frac{لا^ر}{ط^3} + \cdots \right]$$

او پر جو ثابت ہوا ہے اوس سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$(-1)^ر \frac{ن(ن-1)\cdots(ن-ر+1) لا^ر}{\cdots}$$

(۲۸۷) اگر لا اور ی اور ی آپسمین برابر ہوں تو تمام جملہ فنا ہوجاتا ہے - اگر دو حدین اسمین برابر ہوں تو ظاہر معلوم ہوتا ہے کہ جملہ مثبت ہے اگر وہ سب غیر مساوی ہین تو فرض کرو کہ ی موافق نسبت جبریہ کے درمیان لا اور ی کے واقع ہے اور ب = (ا + ح)ا - لر پس لر ضرور مثبت ہوگا اب ب کی قیمت مندرج کرو تو جملہ کی یہہ صورت ہوجائیگی کہ

[ا (ی - لا) + ح (ی - ی)]ا - لر (ی - لا) (ی - ی) اور یہہ مثبت ہے کیونکہ ی - لا اور ی - ی کی مختلف علامتین ہین

(۲۸۸) ہر ایک عدد کی صورت ان تین صورتوں ۵ ن اور ۵ ن ± ۱ اور ۵ ن ± ۲ مین سے ایک نہ ایک ہوگی اب مجذور ۵ ن کا ۲۵ ن۲ ہے اور ۵ ن ± ۱ کا مجذور ۵ ع + ۱ کی صورت کا ہے اور ۵ ن ± ۲ کا مجذور ۵ ق + ۴ کی صورت یعنی ۵ (ق + ۱) - ۱ کی صورت کا پس اس سے معلوم ہوا کہ ہر مجذور ۵ م اور ۵ م + ۱ اور ۵ م - ۱ کی صورتوں مین سے کسی نہ کسی صورت کا ہوگا

ن۵ - ن = ن (ن۴ - ۱) = ن (ن - ۱) (ن + ۱) (ن۲ + ۱) اور صلب ضرب ن (ن - ۱) ن (ن + ۱) پورا تقسیم ۶ پر ہوتا ہے اگر ن - ۱ اور ن اور ن + ۱ مین سے کوئی بھی ۵ پر تقسیم نہ ہوگا تو ن کی صورت ۵ م + ۲ کی یا ۵ م - ۲ کی ہوگی تو ن۲ + ۱ پورا تقسیم ۵ پر ہوگا اگر ن طاق ہو تو ن + ۱ اور ن - ۱ اور ن۲ + ۱ سب جفت ہونگے اور ن - ۱ یا ن + ۱ پورا ۴ پر تقسیم ہوگا پس (ن - ۱) (ن + ۱) (ن۲ + ۱) پورا ۲ × ۲ × ۴ یعنی ۱۶ پر تقسیم ہوتا ہے اس سے ثابت ہوا کہ ن (ن - ۱) (ن + ۱) (ن۲ + ۱) پورا تقسیم ۱۶ × ۳ × ۵ یعنی ۲۴۰ پر ہوتا ہے

(۲۸۹) واقعہ کے مشاہدہ سے پہلے ن فرض ہین جنکا احتمال وقوع برابر ہے یعنی تمام کو لیا اور ہوں شایان

$ز = \frac{-۳ \pm \sqrt{۵}}{۲}$ اور ی $= \frac{-۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$ اصلا $= \frac{۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$ اور لا $= \frac{۳ \pm \sqrt{۵}}{۲}$

پس یہہ چارون رقمین سلسلہ حسابیہ مین ہین اور مجموعہ انکا $\pm ۲\sqrt{۵}$ ہے اور یہہ بہی دریافت ہوگا کہ $لا^۲ + ز^۲$ بہی $\pm ۲\sqrt{۵}$ ہے.

(۲۹۲) دفعہ ۳۴۷ کی طرح عمل کرو کہ

$$ص = ۱ر + ۳^۲ ر^۲ + ۵^۲ ر^۳ + \ldots + (۲ن-۱)^۲ ر^ن$$ تو

$$ص ر = ۱^۲ ر^۲ + ۳^۲ ر^۳ + \ldots + (۲ن-۳)^۲ ر^ن + (۲ن-۱)^۲ ر^{ن+۱}$$

اسواسطے تفریق کرنے سے

$$ص(۱-ر) = ر + ۸ر\left[ر + ۲ر^۲ + ۳ر^۳ + \ldots + (ن-۱)ر^{ن-۱}\right] - (۲ن-۱)^۲ ر^{ن+۱}$$

پس بموجب مثال ۱۸ باب ۳۱ ہمکو یہہ حاصل ہے کہ ص(۱ − ر)

$$= ر + ۸ر\left[\frac{ر - (ن-۱) ر^ن}{۱-ر} + \frac{ر^۲(۱-ر^{ن-۲})}{(۱-ر)^۲}\right] - (۲ن-۱)^۲ ر^{ن+۱}$$

اسکی تحویل ہوکر یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{۱}{(۱-ر)^۳}\left[ر(۱+۶ر+ر^۲) - \left[(۲ن-۱)(۱-ر)+۲\right]^۲ ر^{ن+۱} - ۴ ر^{ن+۲}\right]$$

(۲۹۳) یہان $\frac{س_{ن+۱}}{س_ن} = \left(\frac{۲ن+۱}{۲ن-۱}\right)^۲ ر = \left(۱ + \frac{۲}{۲ن-۱}\right)^۲ ر$ ہم اسکو ن کو کافی بڑا فرض کرکے جتنا چاہین ر کے قریب لا سکتے ہین پس اگر ر چھوٹا واحد سے ہے تو بموجب دفعہ ۵۵۹ وہ انضمامی ہے اب اگر ن غیر متناہی زیادہ ہو تو $ر^{ن+۲}$ غیر متناہی چھوٹا ہوگا اور ایسا ہی $\left[(۲ن-۱)(ر-۱)+۲\right]^۲ ر^{ن+۱}$ چھوٹا ہوگا (مثال ۲۹ دیکھہ لو) پس سلسلہ غیر متناہی ہے اوسکا حاصل جمع $\frac{ر(۱+۶ر+ر^۲)}{(۱-ر)^۳}$ ہے

(۲۹۴) $\sqrt{۷}$ کو کسر متسلسل مین تحویل کرو تو خارج قسمت ۲ و ۱ و ۱ و ۱ و ۴ و ۱ و ۱ و ۱ و ۴ ... ہونگے ہم سے پہلے جو دو متقربہ ہین وہ $\frac{۸}{۳}$ اور $\frac{۱۲۷}{۴۸}$ ہین پس لا = ۸ اور ی = ۳ ایک حل ہے اور لا = ۱۲۷ اور ی = ۴۸ دوسرا

(۲۹۵) چونکہ اول خارج قسمت ۵ ہے تو ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ ع = ۲۵ + لا جسمین لا کیا گیا ہے